# 4. feladatsor – Relációk és műveletek

Ismét $\underline{n}$ jelöli az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt.

**4.1. Feladat.** Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

(1) $\{(a, b) : |a| = |b|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon,
(2) $\{(a, b) : a/b \leq b/a\}$ az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon.
(3) $\{(a, b) : a^2 + b^2 = 1\}$ az $\mathbb{R}$, illetve $[0, 1]$ halmazokon,
(4) $\{\big((a, b), (c, d)\big) : a + d = b + c\}$ az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon.
(5) $\{(1, 5), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (3, 2), (4, 2), (4, 6)\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,
(6) $\{(e, f) : e$ és $f$-nek van közös pontja$\}$ a sík egyeneseinek halmazán.
(7) $\{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon,
(8) $\{(a, b) : |a - b| > 1\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon.

**4.2. Feladat.** Határozzuk meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

(1) $A = \underline{4}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}$;
(2) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$;
(3) $\{(a, b)\colon ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \}$ halmazon;
(4) $\{(a, b)\colon 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon;
(5) $\{(H, G)\colon |H| = |G|\}$ az $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$ halmazon;
(6) $\{(x, y)\colon x$-nek és $y$-nak van közös prímosztója$\}$ az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ halmazon;
(7) $\{(x, y)\colon x$ és $y$ számjegyeinek összege egyenlő$\}$ az $A = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$ halmazon;
(8) $\{(x, y)\colon x^2 + y^2$ páros$\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon.
(9) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x, y) : xy > 0$ vagy $x = y = 0\}$
(10) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x, y) : (\exists a \in \mathbb{Z}) : 3a \leq x, y < 3a + 3\}$

**4.3. Feladat.** Adjunk meg olyan osztályozást a $\underline{8}$ halmazon, melynek 3 osztálya van, és melyhez tartozó $\rho$ ekvivalenciára (külön-külön) teljesülnek a következő feltételek:

(1) $(1, 3), (2, 6) \in \rho$,
(2) $(1, 2) \in \rho, (1, 3), (2, 4), (3, 5) \notin \rho$,
(3) $(1, 2), (3, 4) \in \rho$,
(4) $(1, 3) \in \rho, (3, 5), (2, 7), (3, 4) \notin \rho$.

**4.4. Feladat.** Adjuk meg a következő $\varphi$ leképezések magjához tartozó osztályozást.

(1) $\varphi\colon \underline{6} \to \underline{4}, n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$,
(2) $\varphi\colon P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \to \mathbb{N}, A \mapsto |A|$,
(3) $\varphi\colon \underline{4} \times \underline{4} \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x$,
(4) $(1\ 3\ 5)(2\ 4) \in S_5$.
(5) $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} n - 9, & \text{ha } n \geq 10 \\ n, & \text{különben} \end{cases}$
(6) $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n + 1$
(7) $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \overline{n}^{(3)} + 1$ ($\overline{n}^{(3)}$ az $n$ szám hármas maradéka)
(8) $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto |z|$

**4.5. Feladat.** Hány eleme van azon $\rho \subseteq \underline{7} \times \underline{7}$ ekvivalenciának, melynek

(1) 3 osztálya van, melyek $1, 2, 4$ eleműek,
(2) 3 osztálya van, melyek $2, 2, 3$ eleműek.
(3) 2 osztálya van, melyek $3, 4$ eleműek,
(4) 4 osztálya van, melyek $1, 2, 2, 2$ eleműek.

**4.6. Feladat.** Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek?

(1) $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$;
(2) $(B; \subseteq)$, ahol $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
(3) $(C; |)$, ahol $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$;
(4) $(D_{30}; |)$, ahol $D_n$ jelöli az $n$ pozitív osztóinak halmazát,
(5) $(D_{30}; \leq)$,
(6) $(D_{48} \cap D_{120}; |)$
(7) $(D; \sqsubseteq)$, ahol $D = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$, és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha $a$ minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint $b$ megfelelő számjegye.

**4.7. Feladat.** Adjunk meg olyan Hasse-diagramot, amelyben

(1) bármely két elem összehasonlítható, és összesen 5 eleme van,
(2) bármely két elem összehasonlítható, és nincs benne legkisebb elem,
(3) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 5 eleme van,
(4) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 3 eleme van,
(5) 3 minimális elem van, nincs legnagyobb elem, és összesen 4 eleme van,
(6) egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

**4.8. Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok asszociatívak-e, kommutatívak-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keressük meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze.

(a) $(\mathbb{Q}; \circ)$, ahol $q \circ r = q$;
(b) $(\mathbb{N}; *)$, ahol $m * n = mn - m + n$;
(c) $(\mathbb{R}; \square)$, ahol $x \square y = 12 - 3x - 3y + xy$;
(d) $(\mathbb{R}; \triangle)$, ahol $x \triangle y = xy - 2(x + y) + 6$;
(e) $(\mathbb{R}; \sqcup)$, ahol $x \sqcup y = \max(x, y)$;
(f) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}; \oplus)$, ahol $x \oplus y = |x - y|$.

**4.9. Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok közül melyeknek van egységeleme, zéruseleme, melyek asszociatívak, kommutatívak, melyekben van bármely elemnek inverze. ($\mathbb{Z}_{12} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{11}\}$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $2\times 2$-es valós mátrixok halmaza.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $(\mathbb{N}; +)$; | (b) $(\mathbb{N}_0; +)$; | (c) $(\mathbb{Z}; +)$; | (d) $(\mathbb{Q}; +)$; |
| (e) $(\mathbb{Z}_{12}; +)$; | (f) $(\mathbb{Z}; \cdot)$; | (g) $(\mathbb{Q}; \cdot)$; | (h) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$; |
| (i) $(\mathbb{R}^+; \cdot)$; | (j) $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$; | (k) $(P(\mathbb{N}); \cap)$; | (l) , $(P(\mathbb{N}); \triangle)$; |
| (m) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; +)$; | (n) $(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$. | | |

**4.10. Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a következő kétműveletes struktúrák első művelete disztributív-e, illetve abszorbtív-e a másodikra nézve.

(1) $(\mathbb{R};\ +,\ \cdot)$
(2) $(\mathbb{R};\ \cdot,\ +)$
(3) $(\mathbb{Z};\ +, -)$
(4) $(\mathbb{N};\ \text{lkkt},\ \text{lnko})$
(5) $(P(\mathbb{N});\ \cup,\ \cap)$