3. feladatsor – Halmazok, Leképezések

A feladatsorban $\mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{R}^-$ jelöli a pozitív, illetve negatív valós számok halmazát. Az $\{1, 2, \ldots\}$ halmazt $\mathbb{N}$ jelöli, $\underline{n}$ pedig az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt.

Tekintsük az $\underline{4} = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz következő kétváltozós predikátumait:

$$\begin{array}{c|cccc} P & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & i & i & i & h \\ 2 & h & i & i & h \\ 3 & h & h & h & i \\ 4 & h & i & h & i \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} Q & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & i & i & i & h \\ 2 & h & i & i & i \\ 3 & h & h & i & i \\ 4 & i & h & h & i \end{array}, \quad \begin{array}{c|cccc} R & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & h & h & i & i \\ 2 & h & i & h & h \\ 3 & i & h & i & i \\ 4 & i & h & i & h \end{array}$$

3.1. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, C = \{1, 4, 5\}$. Adjuk meg a következő halmazokat:

$$\overline{A} \cap (B \triangle C),\ A \setminus (\overline{B} \cup C),\ (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$$

3.2. Feladat. Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(1) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})\ (P(x, a) \to P(x, x))\}$,
(2) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})(\forall y \in \underline{4})\ \big(P(a, x) \wedge (P(x, y) \vee P(y, x))\big)\}$.

3.3. Feladat. Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(1) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})\ (R(a, x) \wedge R(x, x))\}$,
(2) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})(\exists y \in \underline{4})\ \big(R(a, x) \to (R(x, y) \wedge R(y, a))\big)\}$.

3.4. Feladat. Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(1) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})\ (P(a, x) \wedge P(x, b))\}$,
(2) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})\ (P(a, x) \to P(b, x))\}$.

3.5. Feladat. Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(1) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})\ (R(a, x) \wedge R(x, b))\}$,
(2) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})\ (R(a, x) \to R(b, x))\}$.

3.6. Feladat. Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(1) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)\ R(a, a)\}$,
(2) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\forall b \in A)\ R(a, b)\}$.

3.7. Feladat. Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

(1) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)\ Q(a, 2)\}$,
(2) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\exists b \in A)\ Q(a, b)\}$.

3.8. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
(2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
(3) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

3.9. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B halmazokra

(1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
(2) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, de általában $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

3.10. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott részhalmazok előállnak-e $A \times B$ alakban.

(1) $\{(x, y) : 2 \leq x < 3, -1 < y < 2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(2) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(3) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$.

3.11. Feladat. Döntsük el, hogy α, β, illetve α^{-1} leképezés-e.

(1) $\alpha = \{(1, 2), (2, 3), (4, 1), (2, 5), (1, 1)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$,
$\beta = \{(5, 2), (4, 1), (3, 2), (2, 1), (1, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$,
(2) $\alpha = \{(2, 3), (2, 1), (4, 4), (3, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$
$\beta = \{(1, 4), (5, 3), (2, 1), (4, 2), (3, 1), (1, 3), (2, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$,
(3) $\alpha = \{(2, 3), (2, 1), (1, 5), (4, 4), (3, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$
$\beta = \{(1, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$.

3.12. Feladat. Határozzuk meg az α és β leképezések $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ szorzatait. Az x szám n-es maradékát $\overline{x}^{(n)}$-nel jelöljük.

(1) $\alpha\colon \underline{6} \to \underline{4},\ x \mapsto \overline{x}^{(4)} + 1$ $\qquad \beta\colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = \overline{x}^{(6)} + 1$,

(2) $\alpha\colon \underline{6} \to \underline{4} = \left\{ \begin{array}{c} (1, 2), (2, 4), (3, 3), \\ (4, 1), (5, 2), (6, 3) \end{array} \right\}$, $\beta\colon \underline{4} \to \underline{6},\ x\beta = \begin{cases} x + 2 & \text{ha } x \text{ páros} \\ x & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}$

3.13. Feladat. Döntsük el, hogy leképezések-e.

(1) $\{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(2) $\{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(3) $\{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$,
(4) $\{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$,
(5) $\{(x, y) : |y| = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,
(6) $\{(x, y) : |y| = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

3.14. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket!

(1) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3x + 1$,
(2) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = |x|, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 2x + 3$.

3.15. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(1) $\varphi_1 = \{(1, 4), (2, 3), (5, 3), (6, 1), (3, 3), (4, 4)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,
(2) $\varphi_2 = \{(1, 4), (4, 2), (3, 1), (2, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{6}$,
(3) $\varphi_3 = \{(1, 5), (2, 3), (5, 4), (3, 1), (4, 2)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$.

3.16. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

(1) $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto |x| + 1$,
(2) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x-8}{7}$,
(3) $\gamma\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}, x = \frac{p}{q} \mapsto 2^p 3^q$, ahol $(p, q) = 1, p, q > 0$,
(4) $\delta\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}, x = \frac{p}{q} \mapsto q$, ahol $(p, q) = 1, p, q > 0$.

3.17. Feladat. Ellenőrizzük, hogy bijektívek az alábbi leképezések, és adjuk meg az inverzüket!

(1) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x\alpha = 3x - 1$,
(2) $\beta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x\beta = (x + 2)^2 - 4$.

3.18. Feladat. Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét.

(1) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x-8}{5}$,
(2) $\beta\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$,
(3) $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x\gamma = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \text{ páros,} \\ x+1 & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}$.

3.19. Feladat. Adjuk meg az összes, $\underline{3}$-ból $\underline{2}$-be menő injektív, illetve szürjektív leképezést.

3.20. Feladat. Adjuk meg az összes, $\underline{3}$-ból $\{a, b, c\}$-be menő bijektív leképezést.

3.21. Feladat. Írjuk fel az alábbi S_7-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(1) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,
(2) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,
(3) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

3.22. Feladat. Adjuk meg a következő S_7-beli, páronként idegen ciklusok szorzataként előállított permutációkat kétsoros írásmódban:

(1) $\delta = (1\,3\,6)(2\,7\,5\,4)$,
(2) $\varepsilon = (1\,7)(2\,6)(3\,4\,5)$,
(3) $\eta = (1\,5\,4\,2\,7\,3)$.

3.23. Feladat. Az előző két feladatban bevezetett jelöléseket felhasználva adjuk meg az alábbi S_7-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(1) $\alpha\beta$, (2) $\beta\alpha$, (3) $(\beta\alpha)^{-1}$, (4) β^2, (5) β^{2013}, (6) α^8, (7) $\varepsilon\eta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1}$.

3.24. Feladat. Adjuk meg a következő S_9-beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

(1) $\big((1\,2\,4)^5(1\,3\,4)\big)^{-4}$,
(2) $\big((1\,2\,4\,3)^{-6}(1\,5\,4)^{13}\big)^{-4}$,
(3) $\Big(((1\,3\,4\,6)(2\,5\,7\,9\,8))^{-1}\,((1\,7\,6)(2\,8\,4)(3\,9))^2\,(1\,3\,4\,6)(2\,5\,7\,9\,8)\Big)^{109}$,
(4) $\Big((1\,5\,4\,3\,7\,2)^9\,((2\,9\,3)(4\,5\,2\,7))^{120}\,(4\,8\,1)\Big)^{-1}$.

3.25. Feladat. Keressük meg azokat a $\sigma \in S_8$ permutációkat, amelyekre teljesülnek a következő összefüggések:

(1) $(1\,5\,3)\sigma(6\,2\,1)(4\,1\,3) = (3\,1\,5)$,
(2) $((1\,2\,3\,4)(7\,3\,8))^3\,\sigma(3\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$,
(3) $(2\,4\,3\,6)^{14}\sigma(1\,2\,3\,5)^{-9} = (1\,4\,2\,3)^{12}$.

3.26. Feladat. Döntsük el, hogy a 3.21. és a 3.22. feladatban bevezetett $\alpha, \ldots, \eta \in S_7$ permutációk, valamint a segítségükkel megadott alábbi permutációk párosak vagy páratlanok:

$$(1)\ \left(\eta^{-1}\delta^{112}\right)^{111}; \quad (2)\ (\varepsilon\gamma\alpha)^{-1}\left(\beta^{-1}\delta\eta^9\right)^2.$$

3.27. Feladat. Hány olyan $\sigma \in S_6$ permutáció van, amelyre

(1) $|M_\sigma| = 0$,

(2) $|M_\sigma| = 1$,
(3) $|M_\sigma| = 2$;
(4) $|M_\sigma| = 3$;
(5) $|M_\sigma| = 4$;
(6) $|M_\sigma| = 5$;
(7) $|M_\sigma| = 6$.

3.28. Feladat. Hány másodrendű elem van S_{25}-ben? Ezek közül hány páros?

3.29. Feladat. Adjuk meg S_6 összes olyan π permutációját, amelyre $\pi^6 = \mathrm{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

3.30. Feladat. Adjuk meg S_{12} összes olyan páros π permutációját, amelyre $\pi^6 = \mathrm{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

3.31. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

(1) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
(2) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni.
(3) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

3.32. Feladat. Adjunk meg bijekciót a

(1) $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, valamint a
(2) $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$

halmazok között.

3.33. Feladat. Adjunk meg bijekciót az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazok között.

3.34. Feladat. Adjunk meg bijekciót az $(0, 1)$ és $[0, 1]$ halmazok között.

3.35. Feladat. Adjunk meg bijekciót

(1) az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$ halmazok között, és
(2) az $\{a \in \mathbb{N} : a \geq 10\}$ és a $\{2z : z \in \mathbb{Z}\}$ halmazok között.

3.36. Feladat. Adjunk meg bijekciót

(1) az $(1, 5)$ és $\mathbb{R}$ halmazok között, és
(2) az $(1, 5)$ és $\mathbb{R}^+$ halmazok között.

3.37. Feladat. Adjunk meg bijekciót az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazok között.

3.38. Feladat. Határozzuk meg a következő halmazok számosságait:

(1) $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$,
(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

3.39. Feladat. Határozzuk meg a következő halmazok számosságait:

(1) $P(\mathbb{Q})$,
(2) a végtelen 0-1 sorozatok halmaza.