

5. feladatsor – Algebrai struktúrák

\mathbb{Z}_n^* jelöli \mathbb{Z}_n azon maradékosztályait, melynek elemei n -hez relatív prímek.

5.1. Feladat. Adjunk példát

- (a) véges csoportra;
- (b) kontinuum elemszámú nemkommutatív csoportra;
- (c) olyan véges gyűrűre, amely nem test;
- (d) véges nemkommutatív gyűrűre;
- (e) olyan csoportra, amelyben az egységelem kivételével minden elem rendje végtelen;
- (f) olyan csoportra, amelyben minden elem rendje véges;
- (g) olyan csoportra, amelyben van több véges és végtelen rendű elem is;
- (h) olyan csoportra, amelyben minden egységelemtől különböző elem rendje 5.

5.2. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok. (Jelölje M_2 a 2×2 -es nemnulla determinánsú valós mátrixok halmazát.)

- (a) $(\mathbb{N}; +)$; (b) $(\mathbb{N}_0; +)$; (c) $(\mathbb{Z}; +)$; (d) $(\mathbb{Q}; +)$;
- (e) $(\mathbb{Z}_{12}; +)$; (f) $(\mathbb{Z}; \cdot)$; (g) $(\mathbb{Q}; \cdot)$; (h) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$;
- (i) $(\mathbb{R}^+; \cdot)$; (j) $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$; (k) $(P(\mathbb{N}); \cap)$; (l) $(P(\mathbb{N}); \Delta)$;
- (m) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$; (n) $(M_2; \cdot)$ (o) $(S_8; \cdot)$ (p) $(\mathbb{Z}_8^*; \cdot)$.

5.3. Feladat. Melyek alkotnak hálót, melyek gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebraik közül?

- (a) $(\mathbb{N}; +; \cdot)$; (b) $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$; (c) $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$; (d) $(\mathbb{R}; +; \cdot)$
- (e) $(\mathbb{Z}_{12}; +; \cdot)$; (f) $(\mathbb{Z}_{13}; +; \cdot)$; (g) $(P(\mathbb{N}); \Delta; \cap)$; (h) $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \cdot)$
- (i) $(\mathbb{Z}; \max; \min)$; (j) $(\mathbb{N}; \text{lnko}; \min)$; (k) $(\mathbb{N}_0; \text{lnko}; \text{lkkt})$ (l) $(\mathbb{Z}_{12}^*; +; \cdot)$.

5.4. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a \mathbb{Z}_{17} testben.

$$(a) \bar{9} + \bar{12}; \quad (b) \bar{2} \cdot \bar{11}; \quad (c) \frac{\bar{2}}{\bar{9}}; \quad (d) \bar{11}^{18}; \quad (e) \bar{11}^{15}.$$

5.5. Feladat. Végezzük el a következő műveleteket a \mathbb{Z}_{15} gyűrűben.

$$(a) \bar{8} + \bar{9}; \quad (b) \bar{3} \cdot \bar{8}; \quad (c) \frac{\bar{2}}{\bar{7}}; \quad (d) \frac{\bar{1}}{\bar{5}}; \quad (e) \bar{2}^{10}.$$

5.6. Feladat. Határozzuk meg a következő csoportokban a megadott elemek rendjét.

- (a) $(\mathbb{Z}, +)$, $o(1)$; (b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $o(-1)$; (c) $(\mathbb{Z}_8, +)$, $o(\bar{6})$;
- (d) $(\mathbb{Z}_{15}, +)$, $o(\bar{7})$; (e) (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) , $o(\bar{3})$; (f) (\mathbb{Z}_9^*, \cdot) , $o(\bar{5})$;
- (g) (S_8, \cdot) , $o((143)(65))$; (h) (S_8, \cdot) , $o((231)(753))$.