7. feladatsor – Kódolás
MEGOLDÁSOK

7.1. Feladat. Meghatározzuk a C minimális távolságát, hány hibajelző ill. -javító. Lineáris-e?

(a) 2 a minimális távolság, vagyis 1-hibajelző és 0-hibajavító. Lineáris;

(b) 3 a minimális távolság, vagyis 2-hibajelző és 1-hibajavító. Nem lineáris (nincs benne a nullvektor);

(c) 2 a minimális távolság, vagyis 1-hibajelző és 0-hibajavító. Lineáris.

7.2. Feladat. Igazoljuk, hogy lineáris. Megadjuk az információs rátáját, a hozzá tartozó szisztematikus kódot és annak ellenőrző- és generátormátrixát.

(a) A linearitás igazolása: zárt az összeadásra (bármely két vektor összege eleme C-nek); $\mathbb{Z}_2$ felett a skalárral szorzást nem kell ellenőrizni; Információs ráta: $\frac{\log_2 4}{4} = \frac{1}{2}$. $D = \{0000, 1011, 0110, 1101\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Információs ráta: $\frac{\log_2 4}{5} = \frac{2}{5}$. $D = \{00000, 10111, 01111, 11000\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Információs ráta: $\frac{\log_3 9}{4} = \frac{1}{2}$.
$D = \{0000, 1021, 2012, 0101, 0202, 1122, 2211, 1220, 2110\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3. Feladat. Kódszó-e v, ha nem, megadjuk a legközelebbi kódszót.

(a) Nem, mert $vP = 100$, ahol P az ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 11011.

(b) Nem, mert $vP = 0020$ lesz a P ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 211122.

(c) Nem, mert $vP = 012$ lesz a P ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 212010.

7.4. Feladat. Hamming-kód ellenőrző- és generátormátrixa, információs rátája.

(a) $n = 3$ és $|K| = 2$ miatt $r = 2$, információs ráta $\frac{1}{3}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $n = 5$ és $|K| = 2$-höz r nem egész, így ilyen Hamming-kód NINCS.

(c) $n = 7$ és $|K| = 2$ miatt $r = 3$, információs ráta $\frac{4}{7}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $n = 4$ és $|K| = 3$ miatt $r = 2$, információs ráta $\frac{1}{2}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.5. Feladat. Meghatározzuk az összes n-hosszú ciklikus lineáris kódot.

(a) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = (x+2)(x^2+x+1)$, vagyis három ilyen kód van.

$g_1 = x+2$-re a kód generátormátrixa: $G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$g_2 = x^2+x+1$-re a kód generátormátrixa: $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$g_3 = 1$-re a kód generátormátrixa: $G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($C_3 = \mathbb{Z}_3^3$.)

(b) $x^4 + 1 = (x+1)^4$ miatt négy ilyen kód van.

$g_1 = 1$-re a kód generátormátrixa: $G_1 = E_4$ ($C_1 = \mathbb{Z}_2^4$).

$g_2 = x+1$-re a kód generátormátrixa: $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$g_3 = x^2+1$-re a kód generátormátrixa: $G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$g_4 = x^3+x^2+x+1$-re a kód generátormátrixa: $G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.6. Feladat. Megadjuk a BCH-kód generátormátrixát.

(a) α (és α^2) minimálpolinomja x^3+x^2+1, így

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

(b) α (és α^2) minimálpolinomja $g_1 = g_2 = x^4+x+1$,
α^3 minimálpolinomja $g_3 = x^4+x^3+x^2+x+1$ ($\text{lnko}(g_1, g_3) = 1$), így
$\text{lkkt}(g_1, g_3) = g_1 g_3 = x^8+x^7+x^6+x^4+1$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

(c) α minimálpolinomja $g_1 = x^3+x^2+2$,
α^2 miniálpolinomja pedig $g_2 = x^3+2x^2+2x+2$ ($\text{lnko}(g_1, g_2) = 1$), így
$\text{lkkt}(g_1, g_2) = g_1 g_2 = x^6+x^4+x+1$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$