5. feladatsor – Polinomok

5.1. Feladat. Határozzuk meg a f és a g polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a megadott polinomgyűrűkben.

(a) $f = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1,\ g = 2x^3 - x^2 - 4x - 1, \quad \mathbb{Q}[x]$;
(b) $f = -x^4 - 4x^3 + 34x^2 + 76x - 105,\ g = x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 7, \quad \mathbb{Q}[x]$;
(c) $f = x^8 - \overline{1},\ g = x^6 - \overline{1}, \quad \mathbb{Z}_{13}[x]$;
(d) $f = \overline{4}x^4 + \overline{2}x^3 + x^2 + x + \overline{2},\ g = \overline{2}x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{1}, \quad \mathbb{Z}_5[x]$.

5.2. Feladat. Határozzuk meg az $f = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ és a $g = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 12$ racionális együtthatós polinomok közös gyökeit, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyökét.

5.3. Feladat. Oldjuk meg az u, v ismeretlen polinomokra az alábbi egyenleteket a megadott polinomgyűrűben.

(a) $(x^2 - 2x - 3)u + (x^2 + 2x - 15)v = x^2 - 3x, \quad \mathbb{R}[x]$;
(b) $(x^5 + x^4 + x^3 + \overline{1})u + (x^4 + \overline{1})v = x^2 + \overline{1}, \quad \mathbb{Z}_2[x]$;
(c) $(x^4 + x^3 + x + \overline{1})u + (x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1})v = x^2 + x, \quad \mathbb{Z}_5[x]$;
(d) $(x^5 + x + \overline{2})u + (x^4 + \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{1})v = x^3 + x^2 + \overline{2}, \quad \mathbb{Z}_3[x]$.

5.4. Feladat. Határozzuk meg, hogy hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám a megadott polinomgyűrűben, majd ennek segítségével alakítsuk szorzattá az f polinomot.

(a) $f = x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 11x^2 + 12x + 9, \quad c = 3, \quad \mathbb{Q}[x]$;
(b) $f = x^5 - 8x^4 + 16x^3 + 18x^2 - 81x + 54, \quad c = 3, \quad \mathbb{R}[x]$;
(c) $f = x^5 - 3ix^4 - 5x^3 + 7ix^2 + 6x - 2i, \quad c = i, \quad \mathbb{C}[x]$;
(d) $f = x^4 + \overline{2}x^3 + x + \overline{2}, \quad c = \overline{2}, \quad \mathbb{Z}_3[x]$.

5.5. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok komplex gyökeit.

(a) $x^4 + 16$;
(b) $x^3 - 8$;
(c) $x^4 - i$;
(d) $x^6 - 64$;
(e) $x^3 + 8i$;
(f) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$.

5.6. Feladat. Adjuk meg a következő polinomok irreducibilis felbontását a $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ testek felett.

(a) $x^5 + x^3 - 6x$;
(b) $x^3 - 8$;
(c) $x^5 + 8x^2$;
(d) $x^4 - 25$;
(e) $x^6 - 27$;
(f) $x^6 - 2x^4 - 8x^2$.

5.7. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok racionális gyökeit és irreducibilis felbontásukat $\mathbb{Q}[x]$-ben.

(a) $f = x^3 - x^2 - x - 2$;
(b) $f = 2x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$;

(c) $f = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 8x - 4$.

5.8. Feladat. Igazoljuk, hogy az alábbi $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

(a) $f = 2x^{100} - 3x^{73} + 69x - 12$;
(b) $f = 41x^{41} - 30x^{30} + 20x^{20} - 10$;
(c) $f = 5x^4 + 22x - 11$.