# 4. feladatsor – Kvadratikus alakok, Euklideszi terek
# MEGOLDÁSOK

**4.1. Feladat.** Bilineáris-e $l$? Ha igen, adjuk meg mátrixát. Ha szimmetrikus, a hozzá tartozó $q$ kvadratikus alakot is adjuk meg.

(a) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, szimmetrikus, $q = x_2^2$;
(b) nem bilineáris;
(c) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nem szimmetrikus;
(d) nem bilineáris;
(e) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, szimmetrikus, $q = x_1^2 + x_2^2$;
(f) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

**4.2. Feladat.** Hozzuk kanonikus alakra, határozzuk meg az osztályát.

(a) $y_1^2$, pozitív szemidefinit;
(b) $-4y_1^2 - 3y_2^2$, negatív definit;
(c) $-4y_1^2 - 3y_2^2$, negatív szemidefinit;
(d) $8y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2$, pozitív szemidefinit;
(e) $y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$, pozitív definit;
(f) $2y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$, indefinit.

**4.3. Feladat.** Keressünk olyan $S$-t, amire $SAS^T$ diagonális.

(a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;
(b) $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;
(c) $S = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$;
(d) Pl.: $S = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{3} & \overline{4} & \overline{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$. (Minden $\begin{pmatrix} \overline{1+2a} & \overline{a} & \overline{4a} \\ \overline{2b} & \overline{b} & \overline{1+4b} \\ \overline{2c} & \overline{c} & \overline{4c} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ alakú mátrix jó.)

**4.4. Feladat.** Határozzuk meg az $u$ vektor $v$ vektorra vett merőleges vetületét.

(a) $(4, 0)$;
(b) $(4, 4)$;
(c) $(\frac{-7}{5}, \frac{14}{5})$;
(d) $(0, 2, 0)$;
(e) $(0, 0, 0)$;
(f) $(4, 6, -2)$;
(g) $(2, 1, 1, 1)$.

**4.5. Feladat.** Hajtsuk végre a megadott vektorrendszeren a Gram-Schmidt algoritmust. (Ezek a vektorrendszerek már normáltak is.)

(a) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$;

(b) $(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$;

(c) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$;

(d) $(\frac{1}{\sqrt{38}}, \frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}), (\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{38}}, -3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{703}}, -\frac{1}{\sqrt{1406}}), (0, \frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{-6}{\sqrt{37}})$;

(e) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$;

(f) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0), (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}})$.

**4.6. Feladat.** Adjuk meg $\mathbb{R}^3$ egy sajátvektorokból álló ortonormált bázisát.

(a) $(0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
(a transzformáció sajátértékei: $1, 1, 3$);

(b) $(0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
(a transzformáció sajátértékei: $3, 3, -1$).