4. feladatsor – Kvadratikus alakok, Euklideszi terek

4.1. Feladat. Melyek bilineárisak az alábbi leképezések közül? Ha leképezés bilineáris, akkor adjuk meg a mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adjuk meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

(a) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_2 y_2$;
(b) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3$;
(c) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_1 y_1$;
(d) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 x_2$;
(e) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$;
(f) $\ell : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - 2x_3 y_2$.

4.2. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra az $\mathbb{R}^n$ vektortéren értelmezett valós kvadratikus alakokat, és határozzuk meg az osztályukat (pozitív/negatív (szemi)definit, stb.)

(a) $n = 2$, $x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2$;
(b) $n = 2$, $-4x_1^2 + 4x_1 x_2 - 4x_2^2$;
(c) $n = 3$, $-4x_1^2 + 4x_1 x_2 - 4x_2^2$;
(d) $n = 3$, $8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3$;
(e) $n = 3$, $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1 x_2 - 4x_2 x_3$;
(f) $n = 3$, $2x_1 x_3 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3$.

4.3. Feladat. Keressünk az alábbi A szimmetrikus mátrixokhoz olyan S nemelfajuló mátrixot, amelyre SAS^T diagonális.

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(c) $A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$;

(d) $A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{4} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{3\times 3}$.

4.4. Feladat. Határozzuk meg az u vektor v vektorra vett merőleges vetületét a megadott $v, u \in \mathbb{R}^n$ vektorok esetén.

(a) $n = 2$, $v = (11, 0)$, $u = (4, 3)$;
(b) $n = 2$, $v = (10, 10)$, $u = (1, 7)$;
(c) $n = 2$, $v = (1, -2)$, $u = (-3, 2)$;
(d) $n = 3$, $v = (0, 6, 0)$, $u = (-4, 2, -3)$;
(e) $n = 3$, $v = (5, 2, -1)$, $u = (1, -1, 3)$;
(f) $n = 3$, $v = (2, 3, -1)$, $u = (-4, 14, 6)$;
(g) $n = 4$, $v = (2, 1, 1, 1)$, $u = (1, 2, 3, 0)$.

4.5. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Schmidt-ortogonalizációt a következő lineárisan független $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszereken! (Normáljunk is!)

(a) $n = 2$, $(4, 4), (0, 4)$;
(b) $n = 3$, $(2, 3, -1), (-4, 14, 6)$;
(c) $n = 3$, $(1, 0, 0), (2, 3, 0), (1, 6, 1)$;
(d) $n = 3$, $(1, 6, 1), (1, 0, 0), (2, 3, 0)$;
(e) $n = 3$, $(1, 0, -1), (0, 2, 0), (0, 4, 1)$;
(f) $n = 4$, $(1, 1, -1, 1), (0, 3, 0, 1), (0, -3, 0, 7)$.

4.6. Feladat. Legyen a $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Adjunk meg az $\mathbb{R}^3$ euklideszi térnek egy, a φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.