3. feladatsor – Lineáris leképezések

3.1. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében tekintsük a következő transzformációkat. Döntsük el, hogy lineáris transzformációk-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magjukat, képterüket és azok dimenzióját, bázisát.

(a) eltolás az $(1,1)$ vektorral;
(b) tükrözés az y tengelyre;
(c) tükrözés az $x=-1$ egyenesre;
(d) merőleges vetítés az x tengelyre;
(e) origó középpontú 2 paraméterű nyújtás;
(f) $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
(g) merőleges vetítés az $y=x$ egyenesre;
(h) tükrözés az $y=x$ egyenesre;
(i) $5\pi/3$ szögű forgatás az origó körül.

3.2. Feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a standard bázisban megadott mátrixát.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y,\ xy)$;
(b) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (x-y,\ x+y)$;
(c) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^3,\ (x,y) \mapsto (x+\overline{2}y,\ x+y,\ \overline{2}x)$;
(d) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (x-y,\ y+1,\ x+z)$.

3.3. Feladat. Határozzuk meg a következő φ lineáris transzformációk mátrixát a megadott $\mathcal{E}$ bázisban. Számítsuk ki a v vektor φ melletti képének koordinátáit ebben a bázisban.

(a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x,\ -y)$,
$\mathcal{E}\colon (2,1), (-1,0), \quad v=(-1,1)$;
(b) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^2 \to \mathbb{Z}_3^2,\ (x,y) \mapsto (x+\overline{2}y,\ \overline{2}x)$,
$\mathcal{E}\colon (\overline{2},\overline{1}), (\overline{1},\overline{1}), \quad v=(\overline{2},\overline{0})$;
(c) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (2x-y,\ x+y,\ 3x-2y-z)$,
$\mathcal{E}\colon (2,0,0), (0,1,1), (0,1,-1), \quad v=(2,2,0)$;
(d) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3,\ (x,y,z) \mapsto (\overline{2}x+y,\ x+y,\ y+\overline{2}z)$,
$\mathcal{E}\colon (\overline{1},\overline{1},\overline{2}), (\overline{0},\overline{2},\overline{1}), (\overline{2},\overline{1},\overline{1}), \quad v=(\overline{2},\overline{1},\overline{2})$.

3.4. Feladat. Tekintsük a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett alábbi φ és ψ lineáris transzformációkat. Határozzuk meg a $\varphi+\psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi-3\psi$ lineáris transzformációkat.

(a) φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó tükrözés;
(b) φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó merőleges vetítés;
(c) φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;
(d) φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/3$ szögű forgatás.

3.5. Feladat. Döntse el, hogy az u, illetve v vektor sajátvektora-e a valós A mátrixnak:

(a) $u=(1,-2,3),\ v=(2,0,-1),\ A=\begin{pmatrix}4 & -4 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$;

(b) $u = (1, -4, 0, 2),\ v = (2, 0, -1, 3),\ A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 10 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

3.6. Feladat. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e a valós A mátrixnak:

(a) $\lambda = -3,\ A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -2 & -9 & 14 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix};$

(b) $\lambda = 2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

3.7. Feladat. Legyen a V vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Határozzuk meg a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátalterekben.

(a) $V = \mathbb{R}^2;\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$

(b) $V = \mathbb{R}^2;\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

(c) $V = \mathbb{C}^2;\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

(d) $V = \mathbb{Z}_3^2;\quad A = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{2} & \overline{0} \end{pmatrix};$

(e) $V = \mathbb{R}^3;\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};$

(f) $V = \mathbb{R}^3;\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 19 & 5 \end{pmatrix};$

(g) $V = \mathbb{Z}_3^3;\quad A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}.$

3.8. Feladat. Határozzuk meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében értelmezett következő lineáris transzformációk sajátértékeit, valamint a sajátalterek egy bázisát.

(a) identikus transzformáció;
(b) zérus transzformáció;
(c) tükrözés az x tengelyre;
(d) merőleges vetítés az y tengelyre;
(e) $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül.