2. feladatsor – Rang, alterek
MEGOLDÁSOK

2.1. Feladat. Megoldások:

(a) $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1,$
vektor alakban: $(2, -3, -1)$;

(b) nincs megoldás;

(c) $x_4 = 1,\ x_1 = 2x_2 - x_3, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R},$
vektor alakban: $(2x_2 - x_3,\ x_2,\ x_3,\ 1), \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

(d) $x_1 = 17 - 3x_2 + 3x_4,\ x_3 = 4 + x_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R},$
vektor alakban: $(17 - 3x_2 + 3x_4,\ x_2,\ 4 + x_4,\ x_4), \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

(e) nincs megoldás;

(f) $x_1 = 4 - 7x_4,\ x_3 = 2 - 4x_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R},$
vektor alakban: $(4 - 7x_4,\ x_2,\ 2 - 4x_4,\ x_4), \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$;

(g) $x_1 = -\frac{14}{3} + 3x_2,\ x_3 = \frac{31}{3},\ x_4 = \frac{17}{6}, \quad x_2 \in \mathbb{R},$
vektor alakban: $(-\frac{14}{3} + 3x_2,\ x_2,\ \frac{31}{3},\ \frac{17}{6}), \quad x_2 \in \mathbb{R}.$

2.2. Feladat. Rang, lineáris függetlenség

(a) $r = 3$, lineárisan független;
(b) $r = 2$, lineárisan függő;
(c) $r = 3$, lineárisan független;
(d) $r = 2$, lineárisan függő;
(e) $r = 2$, lineárisan függő.

2.3. Feladat. Rang, maximális nemeltűnő aldetermináns:

(a) $r = 2,\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$;

(b) $r = 3,\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

(c) $r = 1$, tetszőleges nem nulla elemből álló 1×1-es mátrix determinánsa megfelelő.

2.4. Feladat. $r = 3$.

2.5. Feladat. Az U alterek elemei:

(a) $U = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0})\}$;
(b) $U = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{2}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{1}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}), (\overline{0}, \overline{2}, \overline{2}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{2}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1})\}$;
(c) $U = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{2}, \overline{1})\}$;
(d) $U = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{1}), (\overline{2}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{2}), (\overline{2}, \overline{2}, \overline{0}, \overline{2})\}$.

2.6. Feladat. Előállítások és koordinátasorok:

(a) $(\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}) = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0})$, koordinátasora: $(\overline{0}, \overline{1}, \overline{1})$;

(b) $(\overline{1},\overline{0},\overline{1})=(\overline{1},\overline{1},\overline{1})+(\overline{0},\overline{1},\overline{0})$, koordinátasora: $(\overline{1},\overline{1},\overline{0})$.

2.7. Feladat. Dimenziók és bázisok:

(a) $\dim U=3$, bázis: $(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)$;
(b) $\dim U=2$, bázis: $(1,2,4,1),(0,0,3,-1)$;
(c) $\dim U=2$, bázis: $(\overline{1},\overline{4},\overline{2},\overline{3}),(\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{2})$.

2.8. Feladat. Az U alterek és dimenziójuk:

(a) $U=[(1,0,2),(0,1,0)]$, $\dim U=2$;
(b) $U=\big[(\overline{4},\overline{1},\overline{3})\big]$, $\dim U=1$;
(c) $U=\big[(\overline{1},\overline{2},\overline{1},\overline{0}),(\overline{2},\overline{2},\overline{0},\overline{1})\big]$, $\dim U=2$;
(d) $U=[(1,-1,0,1)]$, $\dim U=1$;
(e) $U=[(2,1,3,0),(0,0,0,1)]$, $\dim U=2$;
(f) $U=[(3,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)]$, $\dim U=3$;
(g) $U=\big[(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{1})\big]$, $\dim U=2$.

2.9. Feladat. Az alterek:

(a) $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1=x_3\}$;
(b) $\{(x_1,x_2,x_3)\colon x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$;
(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon -x_1+2x_2+x_3=0,\ -5x_1+3x_2+x_4=0\}$;
(d) $\big\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_4=\overline{2}x_2\big\}$;
(e) $\big\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\colon \overline{2}x_2+\overline{2}x_3+x_4=\overline{0},\ \overline{2}x_2+x_3+x_5=\overline{0}\big\}$.

2.10. Feladat. Az U_1+U_2 és $U_1\cap U_2$ alterek dimenziói, bázisai:

(a) $\dim(U_1+U_2)=3$, bázis: $(1,2,1,0),(0,3,2,1),(0,0,1,2)$
$\dim(U_1\cap U_2)=1$, bázis: $(2,1,0,-1)$;
(b) $\dim(U_1+U_2)=3$, bázis: $(1,2,1,3),(0,-2,3,-1),(0,0,1,-3)$
$\dim(U_1\cap U_2)=1$, bázis: $(0,2,-3,1)$;
(c) $\dim(U_1+U_2)=4$, bázis: $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$
$\dim(U_1\cap U_2)=1$, bázis: $(3,-3,2,1)$;
(d) $\dim(U_1+U_2)=3$, bázis: $(1,0,0,0),(0,0,0,1),(0,2,1,0)$
$\dim(U_1\cap U_2)=1$, bázis: $(-3,2,1,-3)$;
(e) $\dim(U_1+U_2)=4$, bázis: $(\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{1})$
$\dim(U_1\cap U_2)=1$, bázis: $(\overline{1},\overline{2},\overline{2},\overline{1})$;
(f) $\dim(U_1+U_2)=5$, bázis: $(\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{0})$,
$(\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{1})$
$\dim(U_1\cap U_2)=0$;
(g) $\dim(U_1+U_2)=3$, bázis: $(\overline{1},\overline{0},\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{1},\overline{0}),(\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{1})$
$\dim(U_1\cap U_2)=1$, bázis: $(\overline{1},\overline{1},\overline{2},\overline{1})$.

2.11. Feladat. A V vektortér és U_1,U_2 altereinek megadott dimenziói esetén határozzuk meg az U_1+U_2 és az $U_1\cap U_2$ alterek dimenziójának összes lehetséges értékét.

(a) $\dim(U_1+U_2)=6,\ \dim(U_1\cap U_2)=2$,
$\dim(U_1+U_2)=5,\ \dim(U_1\cap U_2)=3$;
(b) $\dim(U_1+U_2)=5,\ \dim(U_1\cap U_2)=2$,
$\dim(U_1+U_2)=4,\ \dim(U_1\cap U_2)=3$;
(c) $\dim(U_1+U_2)=7,\ \dim(U_1\cap U_2)=0$,
$\dim(U_1+U_2)=6,\ \dim(U_1\cap U_2)=1$,
$\dim(U_1+U_2)=5,\ \dim(U_1\cap U_2)=2$.