
DISZKRÉT MATEMATIKA I.

7. FELADATSOR

MÁTRIX, DETERMINÁNS, SAJÁTÉRTÉK

MBNXK111

7.1. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő mátrixokat:

- (a) $A + B$, (b) $3A$, (c) B^T ,
(d) BC , (e) CA .

7.2. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő mátrixok közül azokat, amelyek léteznek:

- (a) $2A$, (b) $A + B$, (c) $B + C^T$,
(d) BA , (e) BC , (f) CB ,
(g) $AB + 2C^T$.

7.3. Feladat. Határozzuk meg a következő determinánsokat:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$

(b) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix},$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix},$

(f) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix},$

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix},$

(h) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

7.4. Feladat. Határozzuk meg az $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -4)$ és $\underline{c} = (1, 0, 3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

7.5. Feladat. Adjuk meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8$$

egyenlőség.

7.6. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A \cdot A^T$ és $A^T \cdot A$ szorzatmátrixok determinánsát.

7.7. Feladat. Határozzuk meg az alábbi valós mátrixok sajátértékeit.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{(b)} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, & \text{(c)} \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, & \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ \text{(e)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, & \text{(f)} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, & \text{(g)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

7.8. Feladat. Adjuk meg a következő mátrixok inverzét Gauss-elimináció segítségével:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, & \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix}, & \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}. \end{array}$$

7.9. Feladat. Teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges A, B $n \times n$ -es mátrixok esetén?

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} (A - B)(A + B) = A^2 - B^2, & \text{(b)} (AB)^T = A^T B^T, \\ \text{(c)} A^n A^m = A^{nm}, & \text{(d)} (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}. \end{array}$$