
DISZKRÉT MATEMATIKA I.

5. FELADATSOR

LEKÉPEZÉSEK, SZÁMOSSÁGOK

MBNXK111

5.1. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3x + 1,$
- (b) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 2^x - 1, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3^{x-1},$
- (c) $\alpha: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}, \quad \beta: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^2, x \mapsto (x, x-1).$

5.2. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatokban $\mathbb{H}$ jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát és $\mathbb{E}$ jelöli az emberek halmazát.)

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2,$
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, x\beta = x^2,$
- (c) $\gamma = \{(x, y): x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E},$
- (d) $\delta = \{(x, y): \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R},$
- (e) $\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x\varepsilon = \frac{4}{x},$
- (f) $\zeta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n\zeta = |n-3| + 1,$
- (g) $\eta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n \text{ pozitív osztóinak száma},$
- (h) $\theta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y,$
- (i) $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x-1, 1),$
- (j) $\kappa: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x-1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

5.3. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

- (a) nem szürjektív,
- (b) szürjektív, de nem bijektív,
- (c) injektív, de nem bijektív,
- (d) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat!

5.4. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések valóban bijektívek, és adjuk meg az inverzüket.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 3x - 1,$
- (b) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta = (x+2)^2 - 4,$
- (c) $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\gamma = (2x+1)^2 - 1.$

5.5. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között, azaz igazoljuk, hogy a halmazok számossága megegyezik.

- (a) $(0; 1)$ és $(-2; 3),$
- (b) $(1; 6)$ és $(4; 7),$
- (c) $(0; 1)$ és $\mathbb{R},$
- (d) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+.$

5.6. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \rightarrow B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

- | | | |
|---|---|--|
| (a) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$, | (b) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Q}$, | (c) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{R}$, |
| (d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$, | (e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, B = \mathbb{Z}$, | (f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, B = \mathbb{R}$, |
| (g) $A = \mathbb{N}^3, B = \mathbb{Z}$, | (h) $A = \mathbb{Q}^4, B = \mathbb{N}^2$, | (i) $A = \mathbb{R}^2, B = \mathbb{Z}^8$. |

5.7. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

- (a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
- (b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
- (c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?