8. feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek, vektorok

8.1. Feladat. Oldjuk meg Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= 24 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 11 \\ -5x_1 - 6x_2 + 13x_3 &= -14 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= -3 \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 &= 6 \\ -3x_1 - 9x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} -3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 11x_4 &= -8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} a - b + u &= 1 \\ a + c - v &= 2 \\ b + v + w &= 3 \end{aligned}$$

8.2. Feladat. Döntsük el, hogy a következő vektorrendszerek lineáris függetlenek-e, illetve generátorrendszert, bázist alkotnak-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $\underline{a} = (-2, 4)$, $\underline{b} = (1, -2)$;
(b) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$;
(c) $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (4, 1, 0)$, $\underline{c} = (0, 0, 0)$;
(d) $\underline{a} = (1, -2, 4)$, $\underline{b} = (2, -3, 1)$, $\underline{c} = (-4, 5, 5)$;
(e) $\underline{a} = (1, 2, 4)$, $\underline{b} = (3, 5, 1)$, $\underline{c} = (4, 3, -2)$, $\underline{d} = (-1, 4, -3)$;
(f) $\underline{a} = (1, 2, -1)$, $\underline{b} = (3, 1, 4)$, $\underline{c} = (2, 3, -1)$;
(g) $\underline{a} = (1, -2, 3, 4)$, $\underline{b} = (0, -3, 1, 2)$, $\underline{c} = (2, -4, 5, 9)$.

8.3. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben az alábbi vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert?

(a) $\underline{a} = (2, 3)$, $\underline{b} = (x, -6)$;
(b) $\underline{a} = (1, -4, 3, 2)$, $\underline{b} = (-1, 4, -2, -4)$, $\underline{c} = (3, -12, x, 10)$;
(c) $\underline{a} = (-1, -3, 2, 1, -1)$, $\underline{b} = (-2, -8, 7, 3, -1)$, $\underline{c} = (1, 9, -11, -4, x)$;
(d) $\underline{a} = (1, -1, 2)$, $\underline{b} = (2, -1, -1)$, $\underline{c} = (1, 0, x^2)$, $\underline{d} = (2, -1, x + 4)$.

8.4. Feladat. Adjuk meg a $v \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátasorát az $\mathbb{R}^3$ megadott bázisában.

(a) $v = (1, -1, 2)$, bázis: $(1, 2, 3), (-1, 1, -2), (0, 2, 1)$;
(b) $v = (2, 1, -1)$, bázis: $(-4, -2, 2), (1, 2, 4), (-1, 3, 9)$;
(c) $v = (1, -1, 1)$, bázis: $(1, -1, 3), (2, -1, 4), (3, -1, 4)$;
(d) $v = (6, 12, -2)$, bázis: $(3, 5, -7), (-5, -3, 7), (7, 3, 5)$;
(e) $v = (1, 1, 1)$, bázis: $(4, 6, 7), (-3, 5, 7), (2, 5, 6)$.

8.5. Feladat. Határozzuk meg hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldástere, valamint adjuk meg a megoldástér egy bázisát.

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

8.6. Feladat. Adjunk meg a mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében egy bázist. (Ld.: **7.7. Feladat.**)

(a) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda = -3$; **(b)** $\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$; **(c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$;

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$; **(e)** $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$; **(f)** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.