

6. feladatsor – Komplex számok, polinomok

6.1. Feladat. Kanonikus alakban számolva végezzük el a következő műveleteket, adjuk meg a végeredmény kanonikus alakját:

(a) i^{2019} ;	(g) $\frac{\overline{1+3i}}{3+2i}$;
(b) i^{-22} ;	(h) $\frac{(-2+3i)(8+i)}{(-4-7i)(1-i)}$;
(c) $(3+5i)(2-7i)$;	(i) $\frac{\operatorname{Re}(3+5i) - (4-2i)}{(3-2i) + \operatorname{Im}(6+i)}$.
(d) $\overline{(-6+9i+4-8i)} \cdot i$;	
(e) $ -3+4i \cdot (-3-i)$;	
(f) $\frac{-7-i}{1+4i}$;	

6.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán, a megoldásokat kanonikus alakban adjuk meg:

(a) $(1-3i)z = 13-9i$;	(d) $z^2 = i$;
(b) $\overline{3-2i} \cdot z + (-1+5i) = 2i$;	(e) $z^2 = -15+8i$;
(c) $z^2 + z ^2 = 8+6i$;	(f) $z^2 = 5-12i$.

6.3. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi kanonikus alakban megadott komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és írjuk át trigonometrikus és exponenciális alakba ezeket:

(a) 3;	(d) $-8i$;	(g) $2-2\sqrt{3}i$;
(b) -5 ;	(e) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$;	(h) $-\sqrt{3}-i$;
(c) i ;	(f) $1-i$;	(i) $-3 + \sqrt{3}i$.

6.4. Feladat. Ábrázoljuk az alábbi trigonometrikus vagy exponenciális alakban megadott komplex számokat a Gauss-féle számsíkon, és írjuk át kanonikus alakba ezeket:

(a) $2(\cos 0 + i \sin 0)$;	(c) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$;	(e) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$;
(b) $3e^{\frac{3\pi}{2}i}$;	(d) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$;	(f) $e^{\frac{5\pi}{6}i}$;
		(g) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$.

6.5. Feladat. Trigonometrikus vagy exponenciális alakkal számolva határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét, majd adjuk meg az eredmény kanonikus alakját is:

(a) $(\sqrt{3}-i)(2-2\sqrt{3}i)$;	(d) $(\sqrt{3}-i)^{67}$;
(b) $(-2-2i)(-5+5i)$;	(e) $(1+i)^{1222}$;
(c) i^{14} ;	(f) $(-3-3\sqrt{3}i)^{1526}$.

6.6. Feladat. Adjuk meg trigonometrikus és kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét.

- (a) $\sqrt{9}$;
- (b) $\sqrt{-4}$;
- (c) \sqrt{i} ;

- (d) $\sqrt{-16i}$;
- (e) $\sqrt{-15 + 8i}$;
- (f) $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}i}$;

- (g) $\sqrt[3]{-8}$;
- (h) $\sqrt[3]{-8i}$;
- (i) $\sqrt[3]{-8 + 8i}$.

6.7. Feladat. Határozzuk meg a következő polinomok gyökeit. Adjuk meg a gyöktényezős felbontásukat is.

- (a) $x^2 + 1$
- (b) $x^2 + 6x + 10$
- (c) $x^2 + 2i \cdot x - 1$
- (d) $x^3 + 8$

- (e) $x^4 + 9x^2$
- (f) $x^4 - 16$
- (g) $x^4 + 18x^2 + 81$

6.8. Feladat. Lagrange-interpolációval adjunk meg egy polinomot, melyre illeszkednek a következő pontok:

- (a) $A(-1, 1), B(2, 4), C(3, 9)$;
- (b) $A(1, 3), B(2, 8), C(4, 12)$;
- (c) $A(-1, 2), B(0, 0), C(1, 4), D(4, 0)$.