5. feladatsor – Leképezések, számosságok

5.1. Feladat megoldása.

(a) $\alpha\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3x^2 + 1$
$\beta\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (3x+1)^2$

(b) $\alpha\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3^{2^x-2}$
$\beta\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^{3^{x-1}} - 1$

(c) $\alpha\beta\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2,\ (x,y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} - 1)$
$\beta\alpha\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x - \frac{1}{2}$

5.2. Feladat megoldása.

(a) Nem injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(b) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
(c) Nem injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(d) Nem injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(e) Injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(f) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
(g) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
(h) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.
(i) Injektív, nem szürjektív, nem bijektív.
(j) Nem injektív, szürjektív, nem bijektív.

5.3. Feladat megoldása.

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2$
(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ x\beta = x^2$
(c) $\gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x\gamma = x^2$
(d) $\delta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x\delta = x^2$

Az α leképezés nem szürjektív, mert például a -9 nem áll elő egyetlen valós szám négyzeteként sem.
A β leképezés szürjektív, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén $\sqrt{y} \mapsto y$. Viszont nem bijektív, mert például $(-4)\beta = 4\beta$.
A γ leképezés injektív, mert különböző pozitív valós számoknak a négyzete is különböző. Viszont nem szürjektív, mert mert például a -9 nem áll elő egyetlen pozitív valós szám négyzeteként sem.
A δ leképezés bijektív. Injektív: tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ és $a^2 = b^2$. Ekkor $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2}$, sőt $a = b$, mivel a leképezés indulási halmaza most $\mathbb{R}^+$. Szürjektív: tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ szám esetén $\sqrt{y} \mapsto y$.

5.4. Feladat megoldása.

(a) Tegyük fel, hogy $x_1\alpha = x_2\alpha$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1\alpha &= x_2\alpha \\ 3x_1 - 1 &= 3x_2 - 1 \\ 3x_1 &= 3x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Tehát a leképezés injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ esetén, ha az $y = 3x - 1$ formulából kifejezzük az x-et, akkor megkapjuk y ősét, ami $\frac{y+1}{3} \in \mathbb{R}$ és így $\frac{y+1}{3} \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze, és a szürjektivitás igazolásánál kapott formula felhasználásával:

$$\alpha^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x+1}{3}.$$

(b) Tegyük fel, hogy $x_1\beta = x_2\beta$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1\beta &= x_2\beta \\ (x_1+2)^2 - 4 &= (x_2+2)^2 - 4 \\ (x_1+2)^2 &= (x_2+2)^2 \\ |x_1+2| &= |x_2+2| \\ x_1+2 &= x_2+2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Az abszolútértéket azért hagyhattuk el, mert $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. A leképezés tehát injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha az $y = (x+2)^2 - 4$ formulából kifejezzük az x-et, akkor megkapjuk y ősét, ami $\sqrt{y+4} - 2 \in \mathbb{R}^+$ és így $\sqrt{y+4} - 2 \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze, és a szürjektivitás igazolásánál kapott formula felhasználásával:

$$\beta^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \sqrt{x+4} - 2.$$

(c) Tegyük fel, hogy $x_1\gamma = x_2\gamma$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1\gamma &= x_2\gamma \\ (2x_1+1)^2 - 1 &= (2x_2+1)^2 - 1 \\ (2x_1+1)^2 &= (2x_2+1)^2 \\ |2x_1+1| &= |2x_2+1| \\ 2x_1+1 &= 2x_2+1 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Az abszolútértéket azért hagyhattuk el, mert $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. A leképezés tehát injektív. Szürjektív is, mert tetszőleges $y \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha az $y = (2x+1)^2 - 1$ formulából kifejezzük az x-et, akkor megkapjuk y ősét, ami $\frac{\sqrt{y+1}-1}{2} \in \mathbb{R}^+$ és így $\frac{\sqrt{y+1}-1}{2} \mapsto y$. Tehát a leképezésnek létezik inverze, és a szürjektivitás igazolásánál kapott formula felhasználásával:

$$\gamma^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2}.$$

5.5. Feladat megoldása.

(a) $\alpha\colon (0;1) \to (-2;3),\ x\alpha = 5x - 2$
(b) $\beta\colon (1;6) \to (4;7),\ x\beta = \frac{3}{5}x + \frac{17}{5}$
(c) $\gamma\colon (0;1) \to \mathbb{R},\ x\gamma = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$
(d) $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x\delta = 2^x$

5.6. Feladat megoldása.

(a) Igen
(b) Igen
(c) Nem
(d) Igen
(e) Nem
(f) Nem
(g) Igen
(h) Igen
(i) Nem

5.7. Feladat megoldása.

(a) Mindenkit átküld az 1-gyel nagyobb számú szobába, és az új vendéget berakja az 1-es szobába, mert az üres lett.

(b) Mindenkit át kell küldeni a 999999-cel nagyobb szobába, így az első 999999 számú szobák üresen maradnak. Oda elfér a 999999 új vendég.

(c) Mindenki menjen át a kétszer akkora számú szobába, mint amiben most van. Ekkor a páratlan számú szobák üresen maradnak, tehát megszámlálhatóan végtelen sok szoba üres marad, oda mehetnek az új vendégek.