5. feladatsor – Leképezések, számosságok

5.1. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3x + 1$
(b) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = 2^x - 1, \quad \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\beta = 3^{x-1}$
(c) $\alpha\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}, \quad \beta\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^2,\ x \mapsto (x, x - 1)$

5.2. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatokban $\mathbb{H}$ jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát és $\mathbb{E}$ jelöli az emberek halmazát.)

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = x^2$
(b) $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ x\beta = x^2$
(c) $\gamma = \{(x, y)\colon x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$
(d) $\delta = \{(x, y)\colon \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$
(e) $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x\varepsilon = \frac{4}{x}$
(f) $\zeta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n\zeta = |n - 3| + 1$
(g) $\eta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n$ pozitív osztóinak száma
(h) $\theta\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (x, y) \mapsto x + y$
(i) $\iota\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x - 1, 1)$
(j) $\kappa\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x - 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

5.3. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

(a) nem szürjektív,
(b) szürjektív, de nem bijektív,
(c) injektív, de nem bijektív,
(d) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat!

5.4. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések valóban bijektívek, és adjuk meg az inverzüket.

(a) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x\alpha = 3x - 1$
(b) $\beta\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x\beta = (x + 2)^2 - 4$
(c) $\gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x\gamma = (2x + 1)^2 - 1$

5.5. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között, azaz igazoljuk, hogy a halmazok számossága megegyezik.

(a) $(0; 1)$ és $(-2; 3)$
(b) $(1; 6)$ és $(4; 7)$
(c) $(0; 1)$ és $\mathbb{R}$
(d) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$

5.6. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \to B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

(a) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$
(b) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$
(c) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{R}$
(d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}$
(e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z}$
(f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}$
(g) $A = \mathbb{N}^3$, $B = \mathbb{Z}$
(h) $A = \mathbb{Q}^4$, $B = \mathbb{N}^2$
(i) $A = \mathbb{R}^2$, $B = \mathbb{Z}^8$

5.7. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

(a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
(b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
(c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?