# Vektorok

Kátai-Urbán Kamilla

12. előadás

### Definíció.

Legyen $n$ természetes szám. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemeit **valós szám-$n$-eseknek** nevezzük: $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, ahol $a_1, \ldots, a_n$ valós számok; $a_i$ az $\mathbf{a}$ valós szám-$n$-es $i$-edik **komponense**.
Az $(a_1, \ldots, a_n)$ és $(b_1, \ldots, b_n)$ valós szám-$n$-esek pontosan akkor **egyenlők**, ha a megfelelő komponenseik egyenlők, azaz
$a_i = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

### Definíció.

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz elemein definiáljuk az **összeadást** és a **valós számokkal történő szorzást** a következő módon. Ha $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}
(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) &\stackrel{\text{def.}}{=} (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\
\alpha \cdot (a_1, \ldots, a_n) &\stackrel{\text{def.}}{=} (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n).
\end{aligned}$$

# Vektortér

**Definíció.**

Legyen $V$ nemüres halmaz, amin értelmezett az összeadás $(+)$, és a valós számmal való szorzás ($\lambda \cdot$ $(\lambda \in \mathbb{R})$). Ekkor $V$-t **valós vektortérnek** nevezzük, ha tetszőleges $u, v, w \in V$-re és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ skalárra érvényesek a következők:

1. $u + v = v + u$ (az összeadása kommutatív);
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadása asszociatív);
3. van olyan $\underline{0} \in V$ elem, amelyre $\underline{0} + u = u$;
4. $(-1) \cdot u + u = \underline{0}$;
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$;
6. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$;
8. $\alpha \cdot u = \underline{0}$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = 0$ vagy $u = \underline{0}$.

$V$ elemeit **vektoroknak** nevezzük.

## Példa.

Valós vektorterek: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times m}$.

## Definíció.

A $V$ vektortér $v_1, \ldots, v_n$ vektorainak az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokkal képzett **lineáris kombinációja** az $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \in V$ vektor. Ha $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, akkor **triviális lineáris kombinációról** beszélünk.

## Példa.

A $v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, 1)$ vektorok $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 5$ skalárokkal képzett lineáris kombinációja:

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 &= 2 \cdot (1, 1, -1) + (-3) \cdot (0, 1, 1) + 5 \cdot (0, 1, 1)\\ &= (2, 4, -10),\end{aligned}$$

vagyis a $(2, 4, -10)$ vektor előáll az $(1, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 1, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként.

## Definíció.

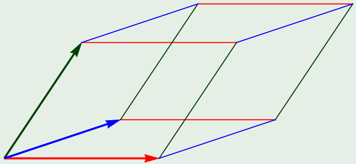
A $V$ valós vektortérbeli $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha pontosan akkor teljesül, hogy $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = \underline{0}$, ha $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Különben a vektorrendszer **lineárisan függő**.

## Példa.

- Az $(1, 1, 1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha $\alpha \cdot (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, akkor szükségképpen $\alpha = 0$.
- Az $(1, -1, 0), (0, 1, 1)$ vektorrendszer lineárisan független, hiszen ha
$$\underbrace{\alpha \cdot (1, -1, 0) + \beta \cdot (0, 1, 1)}_{(\alpha, -\alpha+\beta, \beta)} = (0, 0, 0),$$
akkor az első komponens miatt $\alpha = 0$, a harmadik miatt pedig $\beta = 0$.
- Ha $v_2 \neq \underline{0}$, akkor $\mathbb{R}^n$-ben a $v_1, v_2$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha nincs olyan $\alpha$ skalár, amelyre $v_1 = \alpha \cdot v_2$ teljesül. Azaz, a két vektor nem esik egy egyenesbe.

## Példa.

A térben a $v_1, v_2, v_3$ helyvektorok által alkotott vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független $\mathbb{R}^3$-ben, ha az általuk meghatározott paralelepipedon térfogata nem 0, azaz nem esnek egy síkba.



Az $\mathbb{R}^3$ valós vektortérben a $v_1, v_2, v_3$ vektorok által kifeszített paralelepipedon $V$ térfogata kiszámítható a vektorok komponenseiből kialakított $(3 \times 3)$-as mátrix determinánsának abszolút értékeként. A $V \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha a $v_1, v_2, v_3$ vektorrendszer lineárisan független.

## Példa.

Általánosan az $\mathbb{R}^n$-beli $v_1, \ldots, v_n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a vektorok komponenseiből alkotott $(n \times n)$-es mátrix determinánsa nem 0.

## Tétel.

Egy vektorrendszer lineárisan függő,

- ha tartalmazza a $\underline{0}$ vektort;
- ha két vektora arányos;
- ha valamelyik vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként.

## Példa.

- $(1,1,1),(0,0,0)$ vektorrendszer lineárisan függő ugyanis $0 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (0,0,0) = (0,0,0)$.
- $(3,3,3),(-5,-5,-5)$ vektorrendszer lineárisan függő ugyanis $5 \cdot (3,3,3) + 3 \cdot (-5,-5,-5) = (0,0,0)$.
- $(2,0,1,8),(0,4,0,4),(-6,16,-3,-8)$ vektorrendszer lineárisan függő ugyanis $(-3) \cdot (2,0,1,8) + 4 \cdot (0,4,0,4) = (-6,16,-3,-8)$.

**Tétel.**

Egy lépcsős alakú mátrix zérusvektortól különböző sorvektorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

**Tétel.**

Legyen $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Tekintsük azt a mátrixot, amelynek sorvektorrendszere $v_1, \dots, v_k$. Hozzuk a mátrixot Gauss-elimináció segítségével lépcsős alakra. Pontosan akkor lesz a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan független, ha a mátrix lépcsős alakja nem tartalmaz olyan sort, amelynek minden eleme 0.

## Példa.

Tekintjük az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az alábbi vektorrendszereket, és eldöntjük, hogy lineárisan függetlenek-e.

- $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (3,-1,8)$, $v_3 = (0,2,-3)$;
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
a vektorrendszer **lineárisan független**.
- $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (3,-1,8)$, $v_4 = (0,2,-4)$;
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
a vektorrendszer **lineárisan függő**.
- $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (3,-1,8)$, $v_3 = (0,2,-3)$, $v_5 = (2,1,5)$;
a vektorrendszer mindenképp **lineárisan függő**, mert $\mathbb{R}^3$ vektortérben 4 vektor esetén a lépcsős alakban mindenképpen lesz legalább egy csak 0-kat tartalmazó sor.

# Generátorrendszer

**Definíció.**

A $v_1, \dots, v_k \in V$ által **generált** vektorok halmaza:

$$[v_1, \dots, v_k] = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_k \cdot v_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$

**Definíció.**

A $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorrendszer **generátorrendszer** a $V$ vektortérben, ha

$$V = [v_1, \dots, v_k].$$

**Tétel.**

Legyen $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Tekintsük azt a mátrixot, amelynek sorvektorrendszere $v_1, \dots, v_k$. Hozzuk a mátrixot Gauss-elimináció segítségével lépcsős alakra. Pontosan akkor lesz az $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer generátorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben, ha a mátrix lépcsős alakja $n$ darab nemnulla sort tartalmaz.

# Példa.

Tekintjük az előző példában szereplő $\mathbb{R}^3$-beli vektorrendszereket, és eldöntjük, hogy generátorrendszert alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben.

- $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (3,-1,8)$, $v_3 = (0,2,-3)$;
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
3 nemnulla sor van, a vektorrendszer **generátorrendszer**.

- $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (3,-1,8)$, $v_4 = (0,2,-4)$;
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
2 nem nulla sor van, a vektorrendszer **nem generátorrendszer**.

- $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (3,-1,8)$, $v_3 = (0,2,-3)$, $v_5 = (2,1,5)$;
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \ldots$$

## Példa (folyt.)

$\cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 3 nemnulla sor van, a vektorrendszer **generátorrendszer**.

## Megjegyzés.

Tekintsük a $v_1, \ldots, v_k$ $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszert. Ekkor teljesülnek a következők:

- ha $k > n$, akkor a vektorrendszer lineárisan függő;
- ha $k < n$, akkor vektorrendszer nem generátorrendszer.

## Definíció.

Legyen $V$ valós vektortér. A vektortér lineárisan független generátorrendszerét $V$ **bázisának** nevezzük.

## Példa.

A következő vektorrendszerek bázist alkotnak a megadott vektorterekben.

- Az $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ vektorrendszer a $V = \mathbb{R}^n$ vektortérben (e bázis a **standard bázis** $\mathbb{R}^n$-ben).
- Bármely három nem egy síkba eső vektor a térben.
- A $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (3, -1, 8)$, $v_3 = (0, 2, -3)$ vektorrendszer $\mathbb{R}^3$-ben.

## Definíció.

A $V$ vektorteret **véges dimenziósnak** nevezzük, ha van véges generátorrendszere.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér véges dimenziós, mivel az $e_1, \ldots, e_n$ standard bázis generátorrendszere.

# Dimenzió

**Tétel.**

Véges dimenziós vektortér bármely két bázisa azonos elemszámú.

**Definíció.**

A $V$ véges dimenziós vektortér **dimenzióján**, bázisának közös elemszámát értjük. (Az előző tétel alapján ez a szám egyértelműen meghatározott, és nem függ a bázis választásától.)
A $V$ valós vektortér dimenzióját $\dim(V)$ jelöli.

**Példa.**

Az $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ vektortér $n$-dimenziós, az $e_1, \ldots, e_n$ standard bázis a vektortér bázisát adja, tehát $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

## Tétel.

Ha a $V$ vektortér dimenziója $n$, akkor

- bármely $n$-elemű lineárisan független vektorrendszere bázisa $V$-nek;
- bármely $n$-elemű generátorrendszere bázisa $V$-nek.

## Tétel.

Legyen $v_1, \ldots, v_n$ bázisa a $V$ valós vektortérnek. Ekkor tetszőleges $v \in V$ vektorhoz pontosan egy olyan $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ valós szám-$n$-es létezik, amelyre $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n$ teljesül.

## Definíció.

Az előző tételben szereplő $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ valós szám-$n$-est a $v$ vektor $v_1, \ldots, v_n$ bázisra vonatkozó **koordinátasorának** nevezzük.

A $V = \mathbb{R}^n$ valós vektortérben a $v = (a_1, \ldots, a_n)$ vektor koordinátasora a standard bázisra vonatkozóan $(a_1, \ldots, a_n)$, mivel

$$v = \underbrace{a_1 \cdot e_1}_{(a_1,0,\ldots,0)} + \cdots + \underbrace{a_n \cdot e_n}_{(0,\ldots,0,a_n)} .$$

## Példa.

Meghatározzuk a $v = (1, 1, 1)$ vektor koordinátasorát az

$$\mathcal{E}: \; v_1 = (1, -1, 2), \; v_2 = (2, -1, 7), \; v_3 = (1, -2, 0)$$

bázisban.

Olyan $\alpha, \beta, \gamma$ valós számokat keresünk, melyekre

$$(1, 1, 1) = \alpha \cdot (1, -1, 2) + \beta \cdot (2, -1, 7) + \gamma \cdot (1, -2, 0).$$

Ez az egyenlőség a következő lineáris egyenletrendszer megoldására vezet:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 1 \cdot \alpha & + & 2 \cdot \beta & + & 1 \cdot \gamma & = & 1, \\ (-1) \cdot \alpha & + & (-1) \cdot \beta & + & (-2) \cdot \gamma & = & 1, \\ 2 \cdot \alpha & + & 7 \cdot \beta & + & 0 \cdot \gamma & = & 1. \end{array} \right.$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \cdots \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array} \right)$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $\alpha = 18$, $\beta = -5$, $\gamma = -7$, tehát a $v$ vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban: $(18, -5, -7)$.

# Altér, HLER, Sajátvektor

# Alterek

## Definíció.

A $V$ vektortér $U$ nemüres részhalmaza **altere** $V$-nek, ha zárt az összeadásra és a valós számmal történő szorzásra nézve, azaz bármely két $U$-beli vektor összege $U$-ban van (ha $u, v \in U$, akkor $u + v \in U$) és tetszőleges valós számmal szorozva bármely $U$-beli vektort ismét $U$-beli vektort kapunk (ha $u \in U$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha \cdot u \in U$).
Jele: $U \leqslant V$

## Tétel.

Ha $\underline{0} \notin U$, akkor $U$ nem altér.

Az alterek maguk is (valós) vektorterek, így bármi, amit vektorterekről mondtunk, vonatkozik azok altereire is.

## Példa.

- Tetszőleges $V$ vektortérben $\{\underline{0}\}$ és $V$ alterek, ezek az ún. **triviális alterek**.
- A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geqslant 0\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2,3) \in U$, $-1 \in \mathbb{R}$, de $(-1) \cdot (2,3) = (-2,-3) \notin U$ (azaz $U$ nem zárt a skalárokkal való szorzásra).
  - Az $\mathbb{R}^2$ vektortér azonosítható a síkkal, ekkor $U$ éppen a pozitív síknegyed.
- A $V = \mathbb{R}^2$ vektortérben az $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geqslant 0\}$ részhalmaz nem altér, mert $(2,4), (-3,-2) \in U$, de $(2,4) + (-3,-2) = (-1,2) \notin U$ (azaz $U$ nem zárt a vektorok összeadására vonatkozóan).

## Példa.

A 2-dimenziós síkon, azaz $\mathbb{R}^2$-ben az alterek a következők:

- a sík maga egy 2-dimenziós altér;
- az origón ($\underline{0}$-on) átmenő egyenesek 1-dimenziós alterek;
- a $\{\underline{0}\}$ egy 0-dimenziós altér.

# Alterek megadása

Altér megadható:

- generátorrendszer segítségével,
- lineáris egyenletrendszer segítségével.

Mivel $\underline{0}$ mindig eleme az altérnek, így olyan lineáris egyenletrendszerrel adhatjuk meg a vektorokat, ahol a jobb oldali konstansok mind 0-ák.

**Példa.**

- Az $\mathbb{R}^4$ vektortér $U = [(-1, 0, 1, 0), (2, -1, 0, 1)]$ altere 2-dimenziós, mert a generátorrendszere lineárisan független is, így a vektorok $U$ egy bázisát is adják.
- Az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \colon x_1 + x_3 - 2x_4 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\}$ altere. Hogyan lehet megadni egy bázisát és a dimenzióját?

# Homogén lineáris egyenletrendszer

## Definíció.

Legyen $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ és $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Az $Ax^T = b^T$ lineáris egyenletrendszer **homogén**, ha $b = \underline{0} = (0, \ldots, 0)$. Azaz, ha a lineáris egyenletrendszer

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1} \cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{1,n} \cdot x_n & = & 0 \\ & & & & & \vdots & \\ a_{m,1} \cdot x_1 & + & \ldots & + & a_{m,n} \cdot x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

alakú.

Jelölje $U_A$ a fenti homogén lineáris egyenletrendszer (HLER) megoldásainak halmazát.

Ekkor $U_A$ az alábbi tulajdonságokkal bír:

1. $\underline{0} \in U_A$ ($\underline{0}$ a **triviális megoldása** a HLER-nek);
2. ha $v_1, v_2 \in U_A$, akkor $Av_1{}^T = \underline{0}^T$ és $Av_2{}^T = \underline{0}^T$, aminek következtében $\underline{0}^T = \underline{0}^T + \underline{0}^T = Av_1^T + Av_2^T = A(v_1^T + v_2^T) = A(v_1 + v_2)^T$, így $v_1 + v_2 \in U_A$ ($U_A$ zárt az összeadásra);
3. ha $v \in U_A$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $Av^T = \underline{0}^T$, aminek következtében $\underline{0}^T = \lambda \cdot \underline{0}^T = \lambda \cdot (Av^T) = A(\lambda \cdot v)^T$, így $\lambda \cdot v \in U_A$ ($U_A$ zárt a skalárokkal való szorzásra).

## Tétel.

Ha a homogén lineáris egyenletrendszer $n$ ismeretlent tartalmaz, akkor megoldásai alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Továbbá egy lineáris egyenletrendszer megoldásai pontosan akkor alkotnak alteret, ha a lineáris egyenletrendszer homogén.

## Példa.

Tekintsük az

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

HLER-t. Meghatározzuk a megoldásalteret, $U_A$-t.
A HLER bővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A redukált lépcsős alakból leolvasható: két kötött ($x_1$ és $x_3$) és két szabad ($x_2$ és $x_4$) változó van, továbbá

$$U_A = \{(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

$U_A$ egy bázisát adják a következő $v_1$, $v_2$ vektorok, így $U_A$ 2-dimenziós:

- $x_2 = 1$, $x_4 = 0$: $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$,
- $x_2 = 0$, $x_4 = 1$: $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$.

Korábban megadtunk egy alteret $\mathbb{R}^4$-ben homogén lineáris egyenletrendszer segítségével, most meghatározzuk a dimenzióját és egy bázisát.

## Példa.

$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \colon x_1 + x_3 - 2x_4 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\} \leqslant \mathbb{R}^4$, ekkor a homogén lineáris egyenletrendszer (HLER) bővített mátrixa már redukált lépcsős alakú:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

A megoldás leolvasható: $x_1 = -x_3 + 2x_4$, és $x_2 = -x_4$, tehát két szabad ismeretlen van: $x_3$ és $x_4$, így az altér 2-dimenziós. Egy bázisa megkapható, ha a szabad változóknak $x_3 = 1$ és $x_4 = 0$, majd $x_3 = 0$ és $x_4 = 1$ értéket adunk:

$$v_1 = (-1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (2, -1, 0, 1).$$

Tehát a korábbi példában a kétféle megadás ugyanazt az alteret adta.

# Sajátérték és sajátvektor

Az előző előadáson szerepelt a következő definíció:

**Definíció.**

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a $\lambda$ valós szám **sajátértéke**, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \underline{0}$ vektor, melyre $v \cdot A = \lambda \cdot v$ teljesül.

Definiálható a sajátvektor fogalma is:

**Definíció.**

Az $A$ $(n \times n)$-es mátrixnak **sajátvektora** a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, ha van olyan $\lambda$ valós szám, melyre $v \cdot A = \lambda \cdot v$ teljesül.

Miért az $|A - xE|$ karakterisztikus polinom gyökei lesznek $A$ sajátértékei?

Tegyük fel, hogy a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor sajátvektora az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, mégpedig a $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez tartozó sajátvektora.Ekkor

$$\begin{aligned} v \cdot A = \lambda \cdot v &\iff v \cdot A = v \cdot \lambda \cdot E_n \\ &\iff v(A - \lambda \cdot E_n) = \underline{0}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $v$ **nemtriviális** megoldása az $(A - \lambda \cdot E_n)^T \cdot x^T = \underline{0}^T$ HLER-nek. Ha $|A - \lambda \cdot E_n| \neq 0$ teljesülne, akkor ennek a HLER-nek pontosan egy megoldása lenne, a triviális ($v = \underline{0}$). Így az $A - \lambda \cdot E_n$ mátrix determinánsa 0, ami a következő tételt adja, ami már az előző előadáson látott módszert eredményezte a sajátérték meghatározására.

## Tétel.

Az $A$ mátrixnak a $\lambda$ valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha $|A - \lambda \cdot E_n| = 0$.

# Sajátaltér meghatározása

**Definíció.**

Mátrix adott sajátértékhez tartozó sajátvektorai a zérusvektorral együtt alteret alkotnak. Ezen altér az adott sajátértékhez tartozó **sajátaltér**. A $\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátalteret $U_\lambda$ jelöli.

**Tétel.**

Az $A$ mátrix $\lambda$ sajátértékéhez tartozó sajátalterének egy bázisa éppen az $(A - \lambda \cdot E)^T \underline{x}^T = \underline{0}^T$ HLER megoldásterének egy bázisa.

## Példa.

Megadjuk az $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékéhez tartozó sajátalterét.

1. Az $A$ mátrix karakterisztikus polinomja:
   $$p_A = |A - \lambda \cdot E_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 & 5 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} =$$
   $$= (2-\lambda)[(3-\lambda)(-\lambda) - (-2)] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) =$$
   $$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1).$$
2. Az $A$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 2$.
3. Az $U_{\lambda_1}$, a $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátaltér meghatározása.

## Példa (folyt.)

Az $U_{\lambda_1}$ meghatározása ($\lambda_1 = 1$):
Meg kell oldani az $(A - \lambda_1 \cdot E_3)^T \cdot \mathbf{x}^T = \underline{0}^T$ HLER-t, melynek bővített mátrixa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A megoldások altere a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér. Mivel a redukált lépcsős alakról leolvasható, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, ahol $x_3$ szabad ismeretlen, így:

$$U_{\lambda_1} = \{(0, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\},$$

melynek egy bázisa a $(0, 1, 1)$ vektor.

VIGYÁZAT: $\underline{0} \in U_{\lambda_1}$, de $\underline{0}$ nem sajátvektor!!!