Mátrix sajátértéke, inverze
Lineáris egyenletrendszerek

Kátai-Urbán Kamilla

11. előadás

Mátrix sajátérték

A $v \in \mathbb{R}^n$ vektorokat tekinthetjük $v \in \mathbb{R}^{1\times n}$ mátrixoknak is, így tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén létezik a $v \cdot A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ szorzat. A $\underline{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ vektort **zérusvektornak** (vagy nullvektornak) nevezzük.

Definíció.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak a λ valós szám **sajátértéke**, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \underline{0}$ vektor, melyre $v \cdot A = \lambda \cdot v$ teljesül.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ekkor a $\lambda = 2$ valós szám sajátértéke A-nak, mivel a $v = (1, -2, 3) \neq \underline{0}$ vektorra

$$(1, -2, 3) \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2, -4, 6) = 2 \cdot (1, -2, 3).$$

Sajátérték meghatározása

Definíció.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az $f_A = |A - x \cdot E_n|$ polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

Tétel.

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak a λ valós szám pontosan akkor sajátértéke, ha λ gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Példa.

Meghatározzuk az $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix sajátértékeit.

A mátrix karakterisztikus polinomja:

$$\begin{aligned} f_A &= |A - x \cdot E_2| = \left| \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \begin{vmatrix} 4-x & -5 \\ 1 & -2-x \end{vmatrix} = (4-x)(-2-x) - 1(-5) = x^2 - 2x - 3. \end{aligned}$$

Az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenlet megoldásai: 3 és -1. Így A sajátértékei: $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = -1$.

Példa.

Nem minden valós mátrixnak van sajátértéke. Az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix karakterisztikus polinomja $f_A = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$, amelynek nincs valós gyöke. Tehát az A mátrixnak nincs valós sajátértéke.

Mátrix inverze

Definíció.

Legyen A négyzetes mátrix, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Azt mondjuk, hogy a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix **inverze** A-nak, ha

$$AB = BA = E_n.$$

Megjeyzés.

Nem minden négyzetes mátrixnak van inverze. Ha az A mátrixnak inverze a B mátrix, akkor $1 = |E_n| = |AB| = |A| \cdot |B|$, így $|A| \neq 0$.

Definíció.

Ha az A mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixot **nemelfajulónak** nevezzük. Ha az A mátrixnak létezik inverze, azt mondjuk, hogy az A mátrix **invertálható**.

Tétel.

Az A négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha determinánsa nem 0. Azaz az A négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha nemelfajuló.

Jelölés.

Ha egy mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelmű. Jelölés: A^{-1}.

Tétel.

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrixnak létezik inverze, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

ahol A_{ij} az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált aldeterminánsa.

Példa.

Legyen $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$. Ekkor $|A| = 1 \neq 0$ következtében A invertálható:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

Mátrixok inverze másként is meghatározható, pl. az ún. Gauss-elimináció segítségével. Ezt megoldási módot a lineáris egyenlterendszerek után ismertetjük.

Mátrixinverz azonosságai

Tétel.

Legyen A és B tetszőleges $(n \times n)$-es invertálható mátrix, ekkor

1. $(A^{-1})^{-1} = A$,
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definíció.

Ha A invertálható mátrix, akkor az inverz létezését felhasználva definiálhatók A negatív egész kitevős hatványai:

$$A^{-k} = \left(A^{-1}\right)^k = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1}}_{k \text{ db}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

A hatványozás azonosságai

Definíció.

Tetszőleges A $(n \times n)$-es mátrix esetén $A^0 = E_n$.

Tétel.

Legyen A tetszőleges invertálható mátrix, és $m, k \in \mathbb{Z}$, ekkor

1. $A^{m+k} = A^m A^k$,
2. $(A^m)^k = A^{mk}$.

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció.

Lineáris egyenletrendszernek nevezzük az alábbi objektumot:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}\cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}\cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

ahol

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ az ismeretlenek (vagy változók),

az a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ valós számok az együtthatók,

a $b_1, \ldots, b_n$ valós számok a jobb oldali konstansok.

Definíció.

Az előző lineáris egyenletrendszer **együttható mátrixa** az alábbi $(n \times m)$-es valós mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

amely az egyenletrendszer együtthatóit tartalmazza.

A lineáris egyenletrendszer **bővített mátrixa** (vagy kiegészített mátrixa) az alábbi $(n \times (m+1))$-es valós mátrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right),$$

amely az egyenletrendszer együtthatóit és a jobb oldali konstansokat tartalmazza.

Lineáris egyenletrendszer megadása mátrixokkal

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m} \cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1} \cdot x_1 & + & a_{n2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm} \cdot x_m & = & b_n, \end{cases}$$

A lineáris egyenletrendszer mátrixszorzás segítségével is felírható. Jelölje az együttható mátrixot $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, a változók által alkotott vektort $x = (x_1, \ldots x_m)$, és a jobb oldali konstansokat tartalmazó vektort pedig $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor a lineáris egyenletrendszer felírása mátrixokkal:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x^T = b^T.$$

Cramer-szabály

Definíció.

Azt mondjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer **szabályos**, ha a benne szereplő egyenletek és ismeretlen száma megegyezik, azaz együttható mátrixa négyzetes, továbbá együttható mátrixának determinánsa nem 0.

Cramer-szabály.

Ha az

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}\cdot x_m & = & b_1, \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}\cdot x_m & = & b_n, \end{array}\right.$$

egyenletrendszer szabályos, akkor pontosan egy megoldása van, amely ...

Cramer-szabály folyt.

..., amely a következő:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Tehát a fenti tétel (Cramer-szabály) azt mondja ki, hogy pontosan egy megoldás létezik, azaz az $x_1, \ldots, x_n$ ismeretleneknek csak egyféleképpen lehet úgy értéket adni, hogy az egyenletrendszer egyenletei teljesüljenek.

Sőt, a tétel meg is határozza, hogy mik ezek az értékek:
x_i értékét egy tört adja meg, amelynek nevezője az egyenletrendszer mátrixának determinánsa (amely nem 0, mert az egyenletrendszer szabályos!), a számlálóban pedig az i-edik oszlopot kicseréljük a jobb oldali konstansok b^T oszlopával.

$$\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Példa.

Megoldjuk a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & = & 1, \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & -1. \end{array}\right.$$

egyenletrendszert Cramer-szabállyal, ha lehetséges.
Az egyenletrendszer mátrixa négyzetes, determinánsa:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

az egyenletrendszer szabályos, így alkalmazható a Cramer-szabály.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \color{blue}{1} & 2 & -1 \\ \color{blue}{2} & 2 & 2 \\ \color{blue}{-1} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{13} \qquad x_1 = \frac{-10}{13},$$

Péla folyt.

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{13} \qquad x_2 = \frac{7}{13},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{13} \qquad x_3 = \frac{1}{13},$$

A megoldás vektor alakban: $\left(-\frac{10}{13}, \frac{7}{13}, \frac{1}{13}\right)$.

A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az egyenletrendszer nem ugyanannyi egyenletet és ismeretlent tartalmaz.
A Cramer-szabály **NEM** alkalmazható olyan esetben, ha az egyenletrendszer ugyanannyi egyenletet és ismeretlent tartalmaz, azonban az együttható mátrix determinánsa 0.

Gauss-elimináció

Cramer-szabállyal csak a szabályos lineáris egyenletrendszerek oldhatók meg. Olyan módszert keresünk, amellyel tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldható. A bővített mátrixon a következő ún. elemi átalakításokat hajthatjuk végre. (Zárójelben az szerepel, hogy ez az egyenletrendszernél mely átalakításnak felel meg.)

Gauss-elimináció.

A bővített mátrix **elemi átalakításai** a következők:

- két sor felcserélése (két egyenlet felcserélése),
- egy sorhoz másik sor tetszőleges számszorosának hozzáadása (egy egyenlethez egy másik egyenlet tetszőleges számszorosának hozzáadása),
- sor szorzása 0-tól különböző valós számmal (egy egyenlet megszorzása 0-tól különböző valós számmal).

Ha a B mátrix elemi átalakításokkal keletkezik az A mátrixból, akkor az $A \sim B$ jelölést használjuk.

Jól látszik, hogy az elemi átalakítások során a lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza nem változik.
Célunk az, hogy elemi átalakítások sorozatával minél több ismeretlent kiküszöböljünk az egyenletekből.

Példa.

Megoldjuk a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval. Először felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}\right. \quad \leftrightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Mivel elemi átalakításokkal szeretnénk kiküszöbölni az egyenletekből az ismeretleneket, célszerű olyan sorral nullázni, ami 1-gyel kezdődik, így felcseréljük az első és második sort. Ezután mindig a sor első nemnulla elemével nullázzuk a felette és alatta lévő elemeket.

Példa folyt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[1.]\leftrightarrow[2.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[2.]+(-3)\times[1.],\quad [3.]+(-1)\times[1.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1/2)\times[2.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{[1.]+(-1)\times[2.],\quad [3.]+2\times[2.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Példa folyt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A 2. sor alapján $x_3 = 1$, míg az 1. sorból $x_1 = -x_2$ adódik.

Definíció.

Azokat az ismeretleneket, amelyek tetszőleges valós számot felvehetnek értékként **szabad ismeretleneknek** nevezzük, különben pedig a **kötött ismeretlen** elnevezést használjuk.

Példa folyt.

Az előző lineáris egyenletrendszer esetén

- szabad ismeretlen: x_2;
- kötött ismeretlenek: x_1, x_3.

Ha lineáris egyenletrendszer megoldásait vektorokként adjuk meg, akkor a megoldások halmaza: $\{(-x_2, x_2, 1) \colon x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Lépcsős alak

A következő definícióban megadjuk, hogy a Gauss-elimináció végrehajtásával milyen formára kell alakítani a mátrixot, hogy a megoldás könnyen leolvasható legyen.

Definíció.

A zérusmátrix **lépcsős alakú**. Egy valós, nem-zérus mátrixot **lépcsős alakúnak** nevezünk, ha

- a mátrix azon sorai, amelyek csak 0-kat tartalmaznak, azon sorok alatt helyezkednek el, amelyek tartalmaznak 0-tól különböző elemet,
- ha a mátrix i_1-edik és i_2-edik sora tartalmaz 0-tól különböző elemet $(i_1 < i_2)$, és $a_{i_1 j_1}$, illetve $a_{i_2 j_2}$ ezen sorok első 0-tól különböző elemei, akkor
    - $a_{i_1 j_1} = a_{i_2 j_2} = 1$,
    - $j_1 < j_2$, azaz minden sorban az első nem nulla elem „hátrébb” van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme.
- **Redukált lépcsős alakú** mátrix: lépcsős alakú mátrix, továbbá a nem csak 0-kat tartalmazó sorok kezdő 1-ese feletti elemek 0-ák.

$$
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & \boxed{1} & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare & 0 & \blacksquare \\
0 & \dots & & & 0 & \boxed{1} & \blacksquare & 0 & \blacksquare & \vdots & \blacksquare \\
0 & \dots & & & & & 0 & \boxed{1} & \blacksquare & 0 & \blacksquare \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & \vdots & \\
0 & \dots & & & & & & & & 0 & \\
0 & \dots & & & & & & & 0 & \boxed{1} & \blacksquare \\
0 & \dots & & & & & & & & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \dots & & & & & & & & \dots & 0
\end{pmatrix}
$$

A $\boxed{1}$-sel jelölt elemek a vezéregyesek.

Tétel.

Elemi átalakításokkal (Gauss-eliminációval) bármely mátrix lépcsős alakra hozható.

Megjegyzés.

A Gauss-elimináció nagyon hasonló a determinánsok számolásánál alkalmazható „kinullázáshoz”. Azonban Gauss-elimináció során CSAK a SOROKON végezhetők átalakítások, az OSZLOPOKON NEM.

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Tétel (Lineáris egyenletrendszer megoldhatósága).

Lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixa lépcsős alakjának utolsó nem csupa 0-át tartalmazó sora **ellentmondó**, azaz a következő alakú:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lineáris egyenletrendszer általános megoldása.

- A lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát lépcsős alakra hozzuk Gauss-elimináció segítségével.
- A lépcsős alak ismeretében eldöntjük, hogy van-e megoldás (ld. előző tétel).
- Ha van megoldás, akkor egy általános megoldás leolvasható a lépcsős alakról.
- Ha van megoldás, akkor a vezéregyeseknek megfelelő ismeretlenek lesznek a kötött ismeretelnek. Ha van szabad ismeretlen, akkor végtelen sok megoldás van, különben pontosan egy megoldás van.

Lineáris egyenletrendszer megoldásainak száma

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{array}\right)$$

Nincs megoldás.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & -2 \end{array}\right)$$

Egy megoldás van.
Nincs szabad változó.
Mo.: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$,
$x_3 = -2$
Vektor alakban: $(2, -1, -2)$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Végtelen sok mo. van.
Van szabad változó (x_2).
$x_1 = -x_2$, $x_3 = 1$ ($x_2 \in \mathbb{R}$)
Vektor alakban:
$\{(-x_2, x_2, 1) : x_2 \in \mathbb{R}\}$

Mátrixinverz Gauss-eliminációval

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan mátrix, amelynek determinánsa nem 0. Ekkor az A mátrixnak van inverze, ez éppen az $AX = E_n$ megoldása. Legyen e_i az az n-komponensű vektor, amelynek i. komponense 1 a többi pedig 0. Az e_i^T oszlopvektortokat beírva egy mátrixba épp az E_n egységmátrixot kapjuk.
Ha megoldjuk az $Ax^T = e_i^T$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ egyenleteket, akkor minden egyenletnek pontosan egy megoldása van (ld. Cramer-szabály), ezeket a megoldásokat egy mátrix oszlopaiba beírva éppen az A inverzét kapjuk meg. Mivel az együtthatómátrix minden egyenletnél A, így az összes egyenletet egyszerre is megoldhatjuk Gauss-elimináció segítségével.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array}\right).$$

Példa.

Meghatározzuk Gauss-eliminációval a következő A mátrix inverzét:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Példa (folyt.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)\times[1.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[2.]+2\times[1.],\ [3.]+(-3)\times[1.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[1.]+2\times[2.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)\times[3.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{[1.]+(-2)\times[3.],\ [2.]+(-1)\times[3.]}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Példa (folyt.)

Tehát az

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrix inverze

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzésként kiszámolhatjuk az $A \cdot A^{-1}$ szorzatot:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determináns, sajátérték, inverz (2. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak! (A következő típusú feladatokból szerepel három a tesztben.)

- Az $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ mátrix egy sajátértéke a $\lambda = -1$.
- $\begin{pmatrix} -6 & 7 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix legnagyobb és legkisebb sajátértékének különbsége 6.
- Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak létezik inverze.
- A $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének elemeinek az összege 7.

E-teszt.

- Az $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ mátrix egy sajátértéke a $\lambda = -1$.

  Megvizsgáljuk, hogy gyöke-e a $\lambda = -1$ a karakterisztikus polinomnak: $|A - (-1)E_2| = \begin{vmatrix} -2-(-1) & 0 \\ 3 & -3-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, így nem sajátérték, **hamis** az állítás.

- $\begin{pmatrix} -6 & 7 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix legnagyobb és legkisebb sajátértékének különbsége 6.

  Meghatározzuk a karakterisztikus polinom gyökeit, a determinánst az utolsó oszlopa szerint fejtjük ki: $|A - xE_3| = \begin{vmatrix} -6-x & 7 & 0 \\ -2 & 3-x & 0 \\ 9 & 4 & 2-x \end{vmatrix} =$
  $0 + 0 + (2-x) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -6-x & 7 \\ -2 & 3-x \end{vmatrix} = (2-x)[(-6-x)(3-x) + 14] =$
  $(2-x)(x^2 + 3x - 4) = (2-x)(x+4)(x-1) = 0$. A karakterisztikus polinom gyökei, azaz a mátrix sajátértékei: $-4,\ 1,\ 2$. A legnagyobb és a legkisebb sajátérték különbsége: $2 - (-4) = 6$, így **igaz** az állítás.

E-teszt.

- Az $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ mátrixnak létezik inverze.

  Négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha a determinánsa nem 0. Mivel a mátrixnak van két azonos oszlopa, egy determinánselméleti tétel alapján a determinánsa 0, így nem létezik inverze, az állítás **hamis**.

- A $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének elemeinek az összege 7.

  A mátrix inverze meghatározható Gauss-eliminációval, vagy adjungált aldeterminánsok segítségével. A 2×2-es esetben adjungáltak segítségével sem bonyolult a számolás. A mátrix determinánsa:
  $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \neq 0$, létezik az inverze.

  $$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}^{T} = (-1) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

  Az elemek összege: 13, **hamis** az állítás.

Érdemes általánosan is felírni a 2×2-es mátrix inverzét adjungált aldeterminánsok segítségével.

(2×2)-es mátrix inverze

Ha az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixnak létezik az inverze, akkor

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$