Mátrixok, Determinánsok

Kátai-Urbán Kamilla

10. előadás

Mátrixok

Az $(n \times m)$-es valós mátrix egy „táblázat”, melynek n sora és m oszlopa van. Elemei $\mathbb{R}$ elemei, azaz valós számok. A táblázat elemeit kerek zárójelek közé írjuk.

Jelölés.

- A mátrixokat általában nagybetűkkel jelöljük $(A, B, C, \dots)$. Az $A \in \mathbb{R}^{5\times 6}$ mátrix egy 5 sorból és 6 oszlopból álló valós számokat tartalmazó mátrix.
- Mátrix elemei: a B mátrix i-edik sorának j-edik elemére használhatjuk a b_{ij} jelölést, de ugyanezt az elemet $(B)_{ij}$-vel is szokás jelölni. Az elemeket az oszlopokban fentről lefelé, míg a sorokban balról jobbra számozzuk.

$$\mathbb{R}^{n\times m} \; (n, m \in \mathbb{N})$$

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Összeadás

Definíció.

Ha az A és B mátrixok $(n \times m)$-es mátrixok, akkor összeadhatók, azaz csak azonos méretű mátrixok adhatók össze. Az **összegük** is $(n \times m)$-es mátrix lesz.

Az $A + B$ összegmátrix i-edik sorának j-edik eleme A mátrix i-edik sora j-edik elemének és B mátrix i-edik sora j-edik elemének az összege, azaz a mátrixokat elemenként adjuk össze:

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & (-2)+(-1) \\ 3+0 & 4+1 \\ 2+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mátrix szorzása skalárral

Skalár = valós szám

Definíció.

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén elvégezhető a **skalárral való szorzás**. Az A mátrixot úgy szorozzuk a λ skalárral, hogy A minden elemét megszorozzuk λ-val:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Példa.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mátrix transzponáltja

Definíció.

Mátrix transzponáltja mindig létezik: $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció.

Mátrix transzponáltja mindig létezik: $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció.

Mátrix transzponáltja mindig létezik: $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrix transzponáltja

Definíció.

Mátrix transzponáltja mindig létezik: $(n \times m)$-es mátrix transzponáltja $(m \times n)$-es. Az eredeti mátrix sorait beírjuk az oszlopokba:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mátrixszorzás

Példa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -7 & 5 \end{pmatrix},$$

ahol

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = -4, \\ c_{12} &= 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5, \\ c_{21} &= (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -7, \\ c_{22} &= (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 5. \end{aligned}$$

Definíció.

Ha A $(n \times m)$-es, B pedig $(m \times k)$-s mátrix, akkor létezik a **szorzatuk**, $A \cdot B$, amely $(n \times k)$-s mátrix. Más esetben a szorzat nem létezik.
Ha létezik az $A \cdot B$ szorzatmátrix, akkor az i-edik sorának j-edik elemét a következőképpen kapjuk: összeszorozzuk A i-edik sorának elemeit B j-edik oszlopának megfelelő elemeivel majd az így kapott szorzatokat összeadjuk.

Mátrixszorzás definíciója

Definíció.

Legyen A $(n \times m)$-es, B pedig $(m \times k)$-s mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}.$$

Ekkor az $A \cdot B$ mátrix $(n \times k)$-s, i-edik sorának j-edik eleme:

$$(A \cdot B)_{ij} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots + a_{i,m} b_{m,j} = \sum_{t=1}^{m} a_{it} \cdot b_{tj}.$$

MÁTRIXOK SZORZÁSA NEM KOMMUTATÍV!!!

Példa.

- $A \cdot B$ létezik, de $B \cdot A$ nem létezik.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{de} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ nem létezik}.$$

- $A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, de különböző méretűek.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{de} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}.$$

- $A \cdot B$ és $B \cdot A$ is létezik, egyforma méretűek, de mégsem egyenlők.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{de} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Műveleti tulajdonságok

Tétel.

- $(A+B)+C = A+(B+C)$;
- $A+B = B+A$;
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ és $(B+C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$;
- $(A^T)^T = A$;
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Valahányszor az adott egyenlőség egyik oldala értelmezett, mindannyiszor a másik oldal is, és ekkor a kapott két mátrix megegyezik.

Jelölés.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $k \in \mathbb{N}$, ekkor $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ db}}$.

Szimmetrikus mátrix

Definíció.

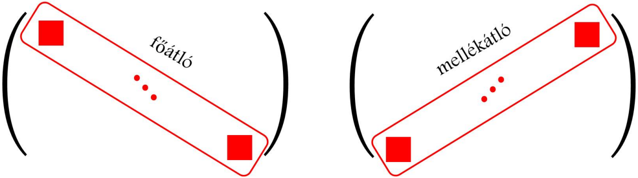
Az A **mátrix szimmetrikus**, ha megegyezik a transzponáltjával, azaz $A^T = A$.

Példa.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés.

Természetesen minden szimmetrikus mátrix négyzetes, azaz $(n \times n)$-es. Az $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrix **főátlóját** az $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ elemek alkotják.



Trianguláris mátrix

Definíció.

Egy $(n \times n)$-es mátrixot **triangulárisnak** nevezünk, ha a főátlója alatt (vagy felett) minden elem 0.

Példa.

- $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{5} & \mathbf{9} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ (felső trianguláris mátrix),
- $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{5} & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ (alsó trianguláris mátrix).

Diagonális mátrix

Definíció.

Az $(n \times n)$-es A mátrixot **diagonálisnak** nevezünk, ha a főátlóján kívüli elemek mind 0-ák (a főátlójában tetszőleges elemek lehetnek).

Példa.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Egységmátrix

Definíció.

Az $(n \times n)$-es **egységmátrix** az a diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1. Jele: E_n.

Példa.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az egységmátrix a mátrixszorzásra nézve úgy viselkedik, mint az 1 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A.$$

Zérómátrix

Definíció.

Az $(n \times n)$-es **zérómátrix** (vagy nullmátrix) az a mátrix, amelynek minden eleme 0.
Jele: Z_n vagy 0_n.

Példa.

$$Z_1 = (0)\,, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

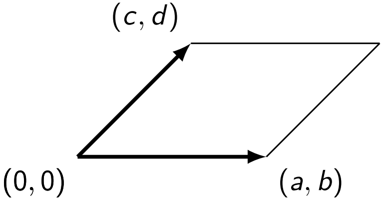
A zérómátrix a szorzásra nézve úgy viselkedik, mint a 0 valós szám a valós számok szorzására nézve: bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix esetén

$$Z_n \cdot A = A \cdot Z_n = Z_n.$$

Determinánsok

Paralelogramma területe

Tekintsük a síkon az (a, b) és (c, d) koordinátájú helyvektorokat. Ez a két vektor egy paralelogrammát feszít ki. Koordinátageometria segítségével belátható, hogy ennek a paralelogrammának a területe éppen $|ad - bc|$.



Definíció.

A (2×2)-es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa az $ad - bc$ valós szám.

Tehát a paralelogramma területe a determináns abszolútértékeként kapható meg.

Csak négyzetes mátrixoknak van determinánsa.

Jelölés.

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix determinánsa valós szám. Ennek a számnak a jele: $\det(A)$ vagy $|A|$ vagy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Az n természetes számot a $\det(A)$ determináns **rendjének** nevezzük.

Definíció.

Az (1×1)-es $A = (a)$ mátrix determinánsa: $|A| = a$.
Nagyobb mátrixokra a determináns definíciója rekurzív: egy $(n \times n)$-es mátrix determinánsához n darab $((n-1) \times (n-1))$-es mátrix determinánsát kell kiszámolni.

Aldeterminláns

Definíció.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Az $|A|$ determináns i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó **aldetermináns** úgy keletkezik, hogy a determinánsból elhagyjuk annak i-edik sorát és j-edik oszlopát. A kapott determináns jele: M_{ij}.

Példa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Definíció.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Az

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

determináns i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó **adjungált aldetermináns** úgy keletkezik, hogy az M_{ij} aldeterminánst ellátjuk a $(-1)^{i+j}$ előjellel:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Példa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{-2} & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Determináns első sora szerinti kifejtése

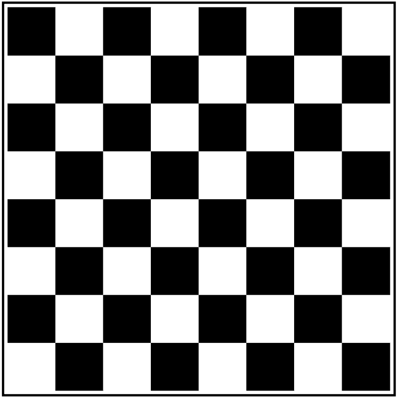
Definíció.

Legyen $n \geqslant 2$ természetes szám.
Ekkor az

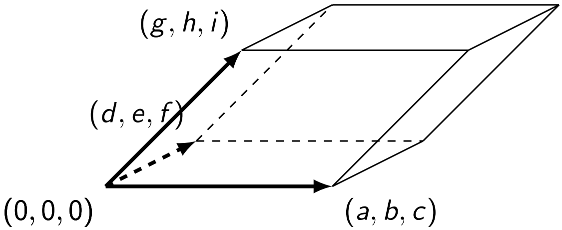
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determináns első sora szerinti kifejtése:

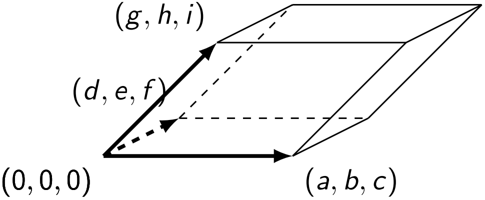
$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot \underbrace{(-1)^{1+j} \cdot M_{1j}}_{A_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}.$$



Paralelepipedon térfogata



A paralelogramma területét a síkon (2×2)-es mátrix determinánsának abszolútértékeként kaptuk meg. A térben az (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) vektorok és az origó által meghatározott test (paralelepipedon) térfogatát 3-ad rendű determináns abszolútértéke adja meg.



A determinánst úgy kapjuk, hogy soraiban az origóból kiinduló élek végponjainak koordinátái szerepelnek. A determináns rekurzív definícióját felhasználva kifejtjük az első sora szerint:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} +$$

$$+c \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg.$$

A paralelepipedon térfogata:

$$V = |aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg|.$$

A determináns rekurzív definíciója alapján az $(n \times n)$-es determináns $n!$ darab szorzat összegeként számítható ki.
Vegyük észre ugyanakkor, hogy ha a determináns első sorában sok a 0, akkor az összegzés jóval egyszerűbb lesz.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-2) \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 = -16.$$

Ezt az észerevételt felhasználva már egy sokkal gyorsabb módszer adódik determinánsok kiszámítására. Ehhez azonban szükség lesz a determinánsok néhány elemi tulajdonságára.

Tétel.

Determináns bármelyik sora, vagy oszlopa szerint kifejthető. A determináns i-edik sora szerint kifejtése:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

A determináns j-edik oszlop szerinti kifejtése:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

Megjegyzés.

A két formula „csak” az összegzés indexében különbözik egymástól.

Determinánsképzés és transzponálás kapcsolata

Tétel.

Legyen A négyzetes mátrix. Ekkor

$$|A| = |A^T|.$$

Azaz négyzetes mátrixnak és transzponáltjának a determinánsa megegyezik.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Dualitási elv.

Ha egy determinánsokra vonatkozó igaz állításban az „oszlop'' és „sor'' szavakat következetesen felcseréljük, akkor szintén igaz állítást kapunk.

Tétel.

Ha egy determináns valamely sorának minden elemét megszorozzuk egy c valós számmal, akkor a determináns értéke is c-szeresére változik.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2020 \cdot 1 & 2020 \cdot 1 & 2020 \cdot 2 \end{vmatrix} = 2020 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -20200.$$

Tétel.

Ha egy determináns főátlója felett (alatt) minden elem nulla, azaz egy *trianguláris mátrix* determinánsa, akkor a determináns értéke a főátlójában lévő elemek szorzata.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 11 = 154.$$

Sorcsere determinánsban

Tétel.

Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke (-1)-szeresére változik.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 120$$

Determináns $= 0$ — elegendő feltételek

Tétel.

Ha a következő feltételek közül valamelyik teljesül, akkor a determináns értéke nulla:

- valamely sorának [oszlopának] minden eleme nulla;
- valamely két sora [oszlopa] azonos;
- valamely két sora [oszlopa] arányos.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -9 & -3 & -12 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

„Nullázás”

Tétel.

A determináns értéke nem változik, ha valamely sorához egy másik sor c-szeresét hozzáadjuk.

A Dualitási elv értelmében a fenti tétel oszlopokra is igaz. Az előző tételt felhasználva bármely determináns bármely sora, vagy oszlopa „kinullázható” vagyis elérhető, hogy benne legfeljebb egy 0-tól különböző elem maradjon.

Példa.

Nullázzuk ki a determináns 3. oszlopát a 3. eleme, az 1 segítségével, majd fejtsük ki a determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix}.$$

Példa folyt

Először vonjuk ki a 2. sorból a 3. sor 3-szorosát:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

majd az 1. sorból vonjuk ki a 3. sor 2-szeresét:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezután a determinánst kifejthetjük az utolsó oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 1.$$

Determinánsok szorzástétele

Tétel.

Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor:

$$|AB| = |A| \cdot |B| \, ,$$

azaz azonos méretű négyzetes mátrixok szorzatának determinánsa a determinánsaik szorzatával egyezik meg.

Polinomok, Mátrixok eletronikus teszt (2. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak, ha

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

- A $C^T \cdot A$ mátrix elemeinek összege 13.

  $C^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 7 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Az elemek összege 12, így **hamis** az állítás.

- Az A^2 mátrixnak eleme a 7.

  $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$, **igaz** az állítás.

- A $2B + A^T$ mátrix elemeinek összege -3.

  $2B + A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ elemeinek összege -4, **hamis** az állítás.

Determináns, sajátérték, inverz (1. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy a determinánsokra vonatkozó alábbi állítások közül melyek az igazak illetve hamisak.

- $\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \leqslant \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.$
- A $v_1 = (2; 6; 4)$, $v_2 = (-1; 0; 4)$, $v_3 = (0; 0; 4)$ helyvektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata 23.
- $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -2 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} \geqslant -23.$

E-teszt.

- Az első oszlopa szerint kifejtve
$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3, \text{ míg } \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 22, \text{ így}$$
igaz az állítás.

- A paralelepipedon térfogata a vektorokból előállított 3-ad rendű determináns abszolútértéke. A determinánst az utolsó sora szerint kifejtve:
$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 4 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 24, \text{ tehát } \textbf{hamis} \text{ az állítás.}$$

- A determináns az első sora szerint kifejtve: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -2 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} =$
$$3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} + 0 + (-7) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -19 \geqslant -23, \text{ így}$$
igaz az állítás.