Komplex számok (2.), Polinomok

Kátai-Urbán Kamilla

9. előadás

Hatványozás

Az előző előadásban láttuk, hogy a trigonometrikus alakban megadott $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ és $u = s(\cos\psi + i\,\sin\psi)$ nemnulla komplex számok esetén a szorzat: $zu = rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi)\big)$, továbbá $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\,\sin(-\varphi))$. Így adódik a hatványozásra a következő tétel.

Tétel (Moivre-képlet).

Ha n egész szám és $z = r\big(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\big)$ egy trigonometrikus alakban megadott nemnulla komplex szám, akkor

$$z^n = r^n\big(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi\big).$$

Példa.

Kiszámoljuk a $-1+i$ komplex szám 2422-edik hatványát.
A $-1+i$ komplex szám trigonometrikus alakjához meg kell határoznunk az abszolút értékét (r) és az argumentumát (φ). Az abszolút érték: $|z| = r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$. A $-1+i$ a 2. negyedben helyezkedik el a komplex számsíkon, és a valós és képzetes rész abszolút értéke megegyezik, így $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Tehát $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

$$\begin{aligned}
(-1+i)^{2422} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3\pi}{4} + i\sin\tfrac{3\pi}{4}\right)\right)^{2422} = \\
&= \sqrt{2}^{2422}\left(\cos\left(2422\cdot\tfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(2422\cdot\tfrac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&= 2^{1211}\left(\cos\left(1816\pi+\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(1816\pi+\tfrac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 2^{1211}\left(\cos\tfrac{\pi}{2} + i\sin\tfrac{\pi}{2}\right) = 2^{1211}i
\end{aligned}$$

FONTOS, hogy 1816π azért hagyható el, mert π-nek PÁROS többszöröse.

Gyökvonás

Definíció.

Tetszőleges n pozitív egész szám és $u \in \mathbb{C}$ esetén azt mondjuk, hogy a z komplex szám **n-edik gyöke** u-nak, ha $z^n = u$.

Tétel.

Minden nemnulla komplex számnak pontosan n különböző n-edik gyöke van. Az $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alakban megadott komplex szám n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{u} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Bizonyítás.

Keressük az u n-edik gyökeit $z=s(\cos\psi+i\,\sin\psi)$ alakban. A Moivre-képlet szerint

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=u=z^n=s^n(\cos n\psi+i\,\sin n\psi).$$

Az abszolút értékeket összehasonlítva: $s=\sqrt[n]{r}$ (ami most egy pozitív valós számot jelöl!). Az argumentumok egybevetéséből: $n\psi=\varphi+2k\pi$, azaz $\psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}$, $k\in\mathbb{Z}$. Ez azonban pontosan n különböző forgásszöget (argumentumot) ad $k=0,1,\ldots,n-1$ esetén.

Példa.

Meghatározzuk $\sqrt[3]{i}$ értékeit.
Az i a képzetes egység, abszolút értéke $r=1$, és a képzetes tengely pozitív felén található, így argumentuma $\varphi=\frac{\pi}{2}$. A trigonometrikus alak $i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, tehát az $r=1$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ és $n=3$ szereposztással kell alkalmaznunk a fenti képletet.

$$k=0:\qquad \cos\frac{\frac{\pi}{2}+0\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=1:\qquad \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=2:\qquad \cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

Gyökvonás kanonikus alakban

Az előző előadáson beláttuk, hogy a $z^2 = u$ egyenlet tetszőlegesen adott u komplex szám esetén megoldható, azaz $\sqrt{u}$ kanonikus alakban számolva is meghatározható.

Példa.

- A $z^2 = -5$ egyenlet megoldásával az előző előadáson megkaptuk, hogy $\sqrt{-5} = \pm\sqrt{5}i$
- A $z^2 = -9 + 12i$ egyenletet megoldottuk az előző előadáson úgy, hogy egy másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletet oldottunk meg a valós számok halmazán, és megkaptuk, hogy $\sqrt{-9 + 12i} = \pm\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}i$.

Megjegyzés.

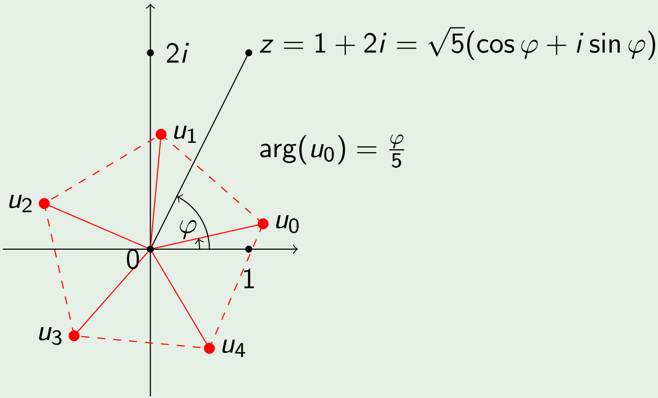
Ha a négyzetgyökvonásra használt eljárást kétszer egymás után alkalmazzuk, akkor $\sqrt[4]{u} = \sqrt{\sqrt{u}}$ is meghatározható kanonikus alakban számolva.

Megjegyzés.

A z komplex szám n-edik gyökei egy szabályos n-szöget alkotnak, amelynek középpontja az origó.

Példa.

A $z = 1 + 2i$ komplex szám ötödik gyökei: $u_0, \ldots, u_4$:



Definíció.

Az ε komplex számot **n-edik egységgyöknek** nevezzük, ha $\varepsilon^n = 1$.

Tétel.

Az n-edik egységgyökök éppen az

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

komplex számok. Ezek páronként különböznek, azaz pontosan n darab van belőlük.

Definíció.

A tételben szereplő ε_k pozitív egész kitevős hatványaiként akkor és csak akkor kapjuk meg az összes n-edik egységgyököt, ha k és n relatív prím. Az ilyen ε_k-kat **primitív n-edik egységgyököknek** nevezzük.

$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{2k\pi}{n},\;\; k = 0, 1, \ldots, n-1$

Példa.

Meghatározzuk a 3. komplex egységgyököket. A fenti képletet $n = 3$ esetén alkalmazzuk.

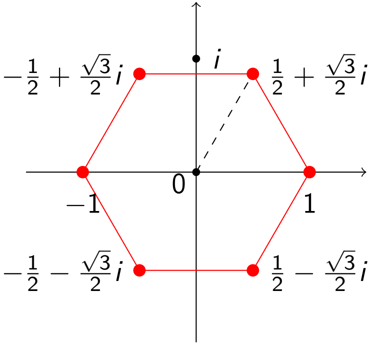
$$k = 0: \qquad \varepsilon_0 = \cos\frac{0\pi}{3} + i\,\sin\frac{0\pi}{3} \;=\; 1$$

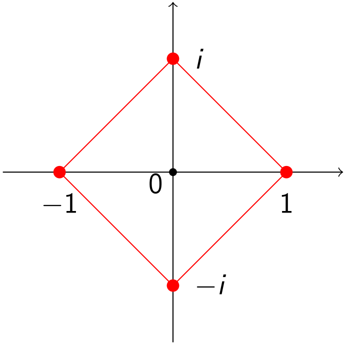
$$k = 1: \qquad \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \;=\; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: \qquad \varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \;=\; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Mivel 1 és 3, illetve 2 és 3 is relatív prímek, így a primitív 3-adik egységgyökök: $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Az n-edik egységgyökök egy szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, amelynek körülírt köre az origó középpontú egységkör, és egyik csúcsa $\varepsilon_0 = 1$.
A hatodik és a negyedik egységgyökök:





Az 1 és 6, illetve az 5 és 6 relatív prímek, így a primitív 6. egységgyökök: $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\varepsilon_5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Az 1 és 4, illetve a 3 és a 4 relatív prímek, így a primitív 4. egységgyökök $\varepsilon_1 = i$ és $\varepsilon_3 = -i$.

Tétel.

Egy nemnulla komplex szám összes n-edik gyökét megkapjuk, ha egy rögzített n-edik gyökét megszorozzuk sorra az n-edik egységgyökökkel. Tehát ha $u_0^n = z \neq 0$, akkor a z komplex szám n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = u_0 \varepsilon_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)\,.$$

Példa.

Láttuk, hogy $\sqrt[3]{i} = -i,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. A három köbgyök közül a „legszebb" $u_0 = -i$ (erre akár számolás nélkül is rá is lehetett volna érezni). Ebből megkaphatjuk a többit a harmadik egységgyökök ismeretében.

$$\begin{aligned}
-i \cdot \varepsilon_0 &= -i \cdot 1 &&= -i \\
-i \cdot \varepsilon_1 &= -i \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\
-i \cdot \varepsilon_2 &= -i \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) &&= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}$$

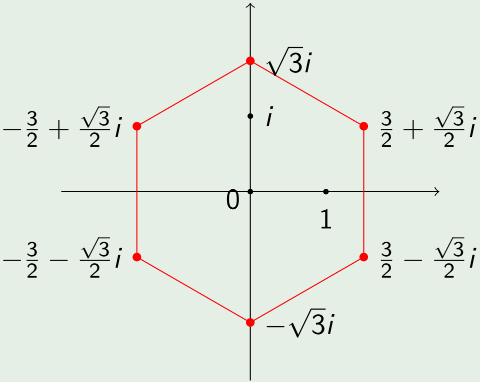
Példa.

Ábrázoljuk $\sqrt[6]{-27}$ értékeit a Gauss-síkon.

A -27 abszolút értéke $r = |-27| = 27$, és $\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$. A -27 a Gauss-síkon a valós tengely negatív felén található, így argumentuma $\varphi = \pi$.

Egyik 6. gyöke $u_0 = \sqrt{3}\,(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6) = \sqrt{3}(\sqrt{3}/2 + i/2) =$
$= 3/2 + i\sqrt{3}/2$.

Ezt megszorozva a 6-odik egységgyökökkel:



Polinomok

Polinom

Definíció.

Legyen T számtest és x határozatlan. Tetszőleges n nemnegatív egész szám és $a_0, a_1, \ldots, a_n \in T$ elemek esetén az

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

összeget (T feletti x határozatlanú) **polinomnak** nevezzük, ha $a_n \neq 0$ vagy $n = 0$ és $a_n = 0$. Az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ elemek az (1) polinom együtthatói. Ha $a_n \neq 0$, akkor n-et a **polinom fokszámának** nevezzük. Ha $n = 0$ és $a_n = 0$, akkor **nullapolinomról** beszélünk, amelynek nem tulajdonítunk fokszámot.

Jelölés.

A T számtest feletti x határozatlanú polinomok halmazát $T[x]$ jelöli, azaz $T[x]$ az a halmaz, amelynek az összes olyan polinom eleme, amelynek együtthatója T-nek eleme. Az x határozatlan helyett más határozatlant is használhatunk, pl. $\mathbb{C}[z]$.

Definíció.

Legyen $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a T számtest feletti polinom. Tetszőleges $c \in T$ esetén az f polinom c helyen vett **helyettesítési értékén** az $f(c) \stackrel{\text{def.}}{=} a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$ (T-beli) értéket értjük. Az f polinomhoz tartozó **polinomfüggvény** a

$$T \to T,\ c \mapsto f(c)$$

leképezés.

Definíció.

A $c \in T$ elem **gyöke** (más szóval **zérushelye**) az $f \in T[x]$ polinomnak, ha $f(c) = 0$.

Bézout-tétel.

Az $f \in T[x]$ polinomnak pontosan akkor gyöke a $c \in T$ elem, ha $f = (x - c)g$ teljesül, valamely $g \in T[x]$ polinomra.

Példa.

Az $f = x^3 - 3x + 2 \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyöke az 1, mert
$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.
Továbbá, $f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$.

Definíció.

Az $f \in T[x]$ polinomnak a $c \in T$ szám ***k*-szoros gyöke**, ha $f = (x - c)^k g$, és c nem gyöke g-nek. A $k \in \mathbb{N}$ számot a c gyök **multiplicitásának** nevezzük.

Példa.

Az előző példában láttuk, hogy $f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$, de $1^2 + 1 - 2 = 0$, azaz 1 gyöke az $x^2 + x - 2$ polinomnak is:
$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$. Így kapjuk, hogy
$f = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$, tehát az 1 szám kétszeres gyöke f-nek.

Definíció.

Az $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$ polinom **gyöktényezős felbontásán** az $f = a_n(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$ szorzatot értjük, ahol a $c_i \in T$ $(i = 1, \ldots, n)$ elemek az f polinom gyökei.

Példa.

A korábbi példában szereplő $f = x^3 - 3x + 2 (= (x-1)^2(x+2)) \in \mathbb{R}[x]$ polinom gyökténytyzős felbontása:
$f = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-1)(x-(-2))$. Az f polinomnak 1 kétszeres gyöke, -2 pedig egyszeres gyöke.
Mindig igaz, hogy az $(x - c)$ tényező pontosan annyiszor lép fel az f polinom gyöktényezős felbontásában, ahányszoros gyöke c az f polinomnak.

Megjegyzés.

Az $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomoknak nem mindig létezik gyöktényezős felbontása a valós számtest felett, például az $f = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ polinomnak nincsen valós gyöke, így nem bontható elsőfokú valós együtthatós polinomok szorzatára.

Az algebra alaptétele

Az algebra alaptétele.

Minden legalább elsőfokú, komplex számtest feletti polinomnak van gyöke a komplex számtestben.

Következmény.

Ha $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ $(a_n \neq 0)$, akkor multiplicitással számolva f-nek n gyöke van. Ha f komplex gyökei $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, akkor f gyöktényezős felbontása: $f = a_n(x - c_1) \ldots (x - c_n)$.

Megjegyzés.

Mivel $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, így természetesen az n-edfokú valós együtthatós polinomokra is teljesül, hogy n gyökük van $\mathbb{C}$-ben.

Példa.

Meghatározzuk az $f = z^2 + (-1+2i)z + 1 + 5i \in \mathbb{C}[z]$ másodfokú polinom gyökeit, és megadjuk a gyöktényezős febontását.

A gyökök meghatározásához az $z^2 + (-1+2i)z + 1 + 5i = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. Használható a jól ismert megoldóképlet. A diszkrimináns:
$D = (-1+2i)^2 - 4(1+5i) = (1-4i-4) - 4 - 20i = -7 - 24i.$
(A diszkrimináns négyzetgyöke hasonlóan számolható kanonikus alakban, mint a 8. előadás 12. diáján található második példa esetén. Javaslom, hogy végezzék el a számítást.)

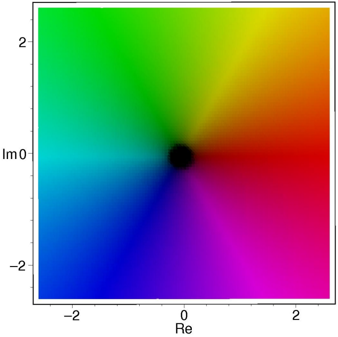
Az f gyökei a megoldóképlet segítségével:

$$z_{1,2} = \frac{-(-1+2i) \pm \sqrt{-7-24i}}{2} = \frac{1-2i \pm (3-4i)}{2},$$

tehát $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = -1 + i$.

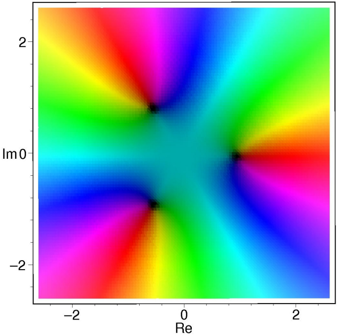
A gyöktényezős felbontás: $f = 1 \cdot (z - (2-3i))(z - (-1+i))$.

Míg a valós számtest feletti polinomokhoz tartozó polinomfüggvény grafikonját ábrázolni tudjuk a síkon a Descartes-féle koordinátarendszerben, addig a komplex számok feletti polinomok esetén ezt nem tudjuk megtenni. Mivel a komplex számokat egy síkon ábrázoljuk (komplex számsík), így az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinomhoz tartozó polinomfüggvény szemléltetésénél is a sík pontjaihoz kell a sík pontjait hozzárendelni. Ahhoz, hogy a polinomfüggvény ábrázolható legyen, vesszük a síknak az alábbi **alapszínezését**. Az $f(x)$ polinomfüggvényhez a sík egy olyan színezését rendeljük, ahol a komplex számsík z pontjának színe épp az alapszínezés szerinti $f(z)$ pont színe. Tehát pl. feketék lesznek a zérushelyek, pirosak azok a helyek, ahol $f(z)$ pozitív valós szám, stb.



$f(z) = z^3 - 1$

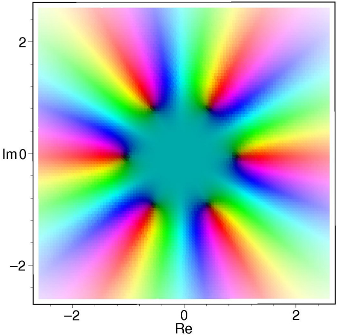
Ábrázoljuk a színkép segítségével az $f = z^3 - 1 \in \mathbb{C}[z]$ polinomhoz tartozó polinomfüggvényt.



Ennek a polinomnak a gyökei (azaz a $z^3 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai), a $\sqrt[3]{1}$ értékei, tehát a 3-adik komplex egységgyökök: 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
(Az előadásban szereplő színképeket Waldhauser Tamás készítette.)

$f(z) = z^6 - 1$

Ábrázoljuk a színkép segítségével az $f = z^6 - 1 \in \mathbb{C}[z]$ polinomhoz tartozó polinomfüggvényt.



Ennek a polinomnak a gyökei (azaz a $z^6 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai), a $\sqrt[6]{1}$ értékei, tehát a 6-odik komplex egységgyökök: 1, $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Tetszőlegesen adott $u \in \mathbb{C}$ szám esetén meg tudjuk adni az $\sqrt[n]{u}$ értékeit a gyökvonásra adott képlet segítségével, így az $f = z^n - u$ polinom gyökeit meg tudjuk határozni. Továbbá ha másodfokú, vagy másodfokúra visszavezethető a polinom, alkalmazhatjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét.

Példa.

- Megadjuk az $f = x^3 - i$ polinom gyöktényezős felbontását, felhasználva azt, hogy korábban meghatároztuk $\sqrt[3]{i}$ értékeit:
  $f = (x - (-i))\left(x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right)$.
- Az $f = x^2 + x + 1$ polinomnak a valós számok felett nincs gyöktényezős felbontása, mert az $f(x) = 0$ egyenlet diszkriminánsa -3, de komplex számok körében $\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}i$, így a gyöktényezős felbontása $\mathbb{C}$ felett:
  $f = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$.
- Megadjuk az $f = 3x^5 + 3x^3 - 18x$ polinom gyöktényezős felbontását $\mathbb{C}$ felett. Szorzattá alakítjuk a polinomot
  $f = 3x^5 + 3x^3 - 18x = 3x(x^4 + x^2 - 6) = 3x(x^2 - 2)(x^2 + 3) =$
  $= 3x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3}i)$. Tehát f gyökei: 0, $\pm\sqrt{2}$ és $\pm\sqrt{3}i$.

Valós együtthatós polinomok komplex gyökei

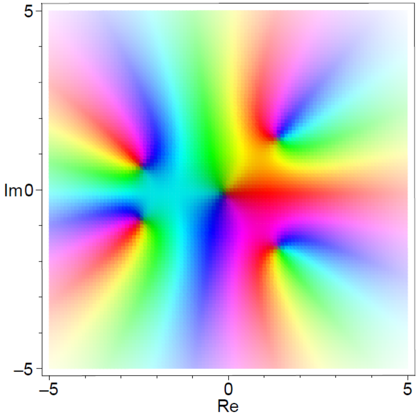
Tétel.

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ és a c komplex szám gyöke az f valós együtthatós polinomnak, akkor $\overline{c}$ is gyöke a polinomnak.

Bizonyítás.

Az előző előadáson láttuk, hogy tetszőleges $u, v \in \mathbb{C}$ számok esetén $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$ és $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$ teljesül. Felhasználva ezeket összefüggéseket, illetve azt, hogy a valós együtthatók konjugáltja önmaga, kapjuk, hogy $f(\overline{c}) = \overline{f(c)} = \overline{0} = 0$, azaz, ha c gyöke a polinomnak, akkor $\overline{c}$ is gyöke.

A képen látható az $f = \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{3}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{16}{3}z \in \mathbb{C}[z]$-beli polinom színképe, a polinom együtthatói valósak. Megfigyelhetők a konjugált gyökpárok.



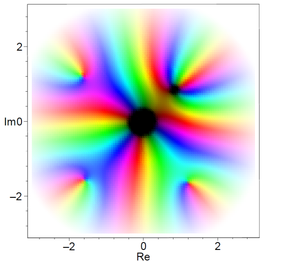
Következmény.

Ha $f \in \mathbb{R}[x]$ páratlan fokszámú, akkor az előző tétel következtében f-nek van valós gyöke.

A dolgozatban NEM fognak szerepelni színképekkel kapcsolatos feladatok, a színképek csak a szemléltetést szolgálják, és a megértést segítik.

Feladat.

- Hogyan nézhet ki a z^3 színképe? A 0-ból hány irányba „sugároznak" a színek?
- Mit jelenthet az, hogy a lenti színképen vannak olyan zérushelyek, ahonnan a színek több irányba „sugároznak"?
- Hányadfokú lehet a lenti színképhez tartozó polinom?
- Valós együtthatós ez a polinom?



Lagrange-féle interpolációs polinom

Lagrange-féle interpolációs tétel.

Legyen T számtest, $c_0, c_1, \ldots, c_n \in T$, $d_0, d_1, \ldots, d_n \in T$, és tegyük fel, hogy a c_i-k páronként különböznek. Ekkor létezik egy és csakis egy $L \in T[x]$ **legfeljebb n-edfokú** polinom, amelyre $L(c_0) = d_0$, $L(c_1) = d_1$, …, $L(c_n) = d_n$. Ez az L polinom a következő:

$$L = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - c_0) \ldots (x - c_{i-1})(x - c_{i+1}) \ldots (x - c_n)}{(c_i - c_0) \ldots (c_i - c_{i-1})(c_i - c_{i+1}) \ldots (c_i - c_n)} \cdot d_i.$$

Megjegyzés.

Az L polinomot a $c_0, \ldots, c_n$ alappontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomnak** nevezzük. Ha $T = \mathbb{R}$, akkor az L által meghatározott polinomfüggvény grafikonja a (c_0, d_0), (c_1, d_1), …, (c_n, d_n) pontokon megy át.

Bizonyítás.

Az L nyilván legfeljebb n-edfokú, hiszen az összeg tagjai is ilyenek. Azt kell belátni, hogy bármely j-re $L(c_j) = d_j$, ahol

$$L = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-c_0)\dots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\dots(x-c_n)}{(c_i-c_0)\dots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\dots(c_i-c_n)} \cdot d_i.$$

$L(c_j)$ esetén az összegnél az $i = j$ tagot kivéve minden tagnál szerepel a számlálóban a $c_j - c_j$ különbség, így ezek a tagok 0-k, tehát csak az $i = j$ tag lehet nemnulla.

$$L(c_j) = \frac{(c_j-c_0)\dots(c_j-c_{j-1})(c_j-c_{j+1})\dots(c_j-c_n)}{(c_j-c_0)\dots(c_j-c_{j-1})(c_j-c_{j+1})\dots(c_j-c_n)} \cdot d_j = d_j.$$

A Lagrange-féle interpolációs polinom meghatározása szerepel az elektronikus tesztekben, így az előadásban az „Elektronikus teszt” résznél található példa.

Komplex számok elektronikus teszt (2. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- Ha $z = -2 + 5i$, akkor $|z| = \sqrt{29}$.
- $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$.
- $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

E-teszt.

- Ha $z = -2 + 5i$, akkor $|z| = \sqrt{29}$. Az állítás **igaz**, mert $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.
- $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$. Mivel a valós rész negatív, a képzetes pedig pozitív, így a a komplex szám a 2. negyedben van a Gauss-síkon, de $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, így **hamis** az állítás. A 2. negyedben $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$.
- $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. A $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ komplex szám abszolút értéke 1, argumentuma $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, tehát
  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-5} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)^{-5} = \cos\frac{-10\pi}{3} + i \sin\frac{-10\pi}{3} =$
  $\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, mivel $\frac{-10\pi}{3} = \frac{-12\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -4\pi + \frac{2\pi}{3}$.
  Tehát **igaz** az állítás.
  Második megoldás: $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ harmadik komplex egységgyök, így $\varepsilon^3 = 1$. Tehát $\varepsilon^{-5} = \varepsilon^{-6}\varepsilon = (\varepsilon^3)^{-2}\varepsilon = \varepsilon$.

Polinomok, Mátrixok eletronikus teszt (1. fel.)

$$L = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-c_0)\dots(x-c_{i-1})(x-c_{i+1})\dots(x-c_n)}{(c_i-c_0)\dots(c_i-c_{i-1})(c_i-c_{i+1})\dots(c_i-c_n)} \cdot d_i.$$

E-teszt.

A $(-1,1),(-2,4),(-3,-7)$ pontokra illeszkedő p Lagrange-polinom esetén $p(-5)=-71$.

A Lagrange-féle interpolációs polinom a következő tagokból áll:

$$L_0 = \tfrac{(x-(-2))(x-(-3))}{(-1-(-2))(-1-(-3))} \cdot 1 = \tfrac{1}{2} \cdot (x^2+5x+6),$$

$$L_1 = \tfrac{(x-(-1))(x-(-3))}{(-2-(-1))(-2-(-3))} \cdot 4 = (-4) \cdot (x^2+4x+3),$$

$$L_2 = \tfrac{(x-(-1))(x-(-2))}{(-3-(-1))(-3-(-2))} \cdot (-7) = (-\tfrac{7}{2}) \cdot (x^2+3x+2).$$

Tehát $p = L_0 + L_1 + L_2 = -7x^2 - 24x - 16$, így $p(-5) = -71$, tehát **igaz**.