Komplex számok (1.)

Kátai-Urbán Kamilla

8. előadás

Régi bánatunk, hogy a negatív számokból nem tudunk négyzetgyököt vonni. Hasonló „bánatok" vezettek a számfogalom fejlődéséhez.

A természetes számok $\mathbb{N}$ esetén nem lehetett osztani $\rightarrow$ bevezették a pozitív racionális számokat. Nem lehetett kivonni $\rightarrow$ $\mathbb{Q}$.
Nem lehetett mérni (pl. az egységnégyzet átlóját) $\rightarrow$ $\mathbb{R}$.

Ez mindig a permanencia elv szerint történt, ez azt jelenti, hogy pl. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, és két racionális számra a műveleteket ugyanúgy kell végrehajtani $\mathbb{Q}$-ban, mint $\mathbb{R}$-ben.

Az, hogy nem lehet egy műveletet elvégezni, például az egyenletek megoldásakor okozhat nehézséget. Lehetséges, hogy a megoldás (mint érték) a szűkebb számkörben van, de a megoldási folyamat kivezet onnan. Például attól, hogy menet közben törtek lépnek fel, a végeredmény lehet természetes szám.

$\mathbb{R}$ elemeit egy egyenes (a számegyenes) pontjaival szemléltetjük. A most bevezetendő komplex számokat (ezek halmazát $\mathbb{C}$ jelöli) pedig a sík (az ún. **komplex számsík** vagy más néven **Gauss-féle számsík** pontjaival).

Definíció.

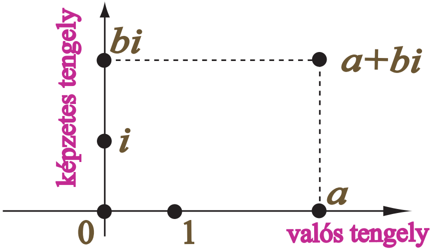
A komplex számok halmaza $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De a $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ helyett azt írjuk, hogy $z = a + bi$. Tehát az $a + bi$ lényegében egy rendezett párt jelöl, amelynek első komponense a z komplex szám ún. **valós része**. Az i együtthatója a második komponens, amelyet a komplex szám **képzetes részének** nevezünk. Itt i egyelőre csak egy szimbólum, a képzetes egység.

Jelölés.

A z komplex szám valós részét $\mathrm{Re}\,(z)$, képzetes részét $\mathrm{Im}\,(z)$ jelöli. Ha $z = a + bi$, akkor $\mathrm{Re}\,(z) = a$ és $\mathrm{Im}\,(z) = b$.

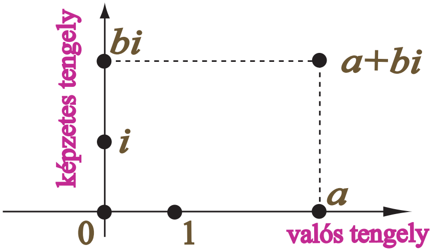
Definíció.

Az $a + bi$ jelölés a komplex szám **kanonikus alakja**. Mivel ez az (a, b)-t jelöli, a koordinátasíkon (amelyet mostantól a komplex számsíknak nevezünk) ez a komplex szám az (a, b) koordinátákkal megadott pontnak felel meg.



Két komplex szám pontosan akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik is megegyeznek, azaz $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \iff a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.

Az eddigi valós számok éppen azok a komplex számok, amelyek képzetes része 0; ezek a **valós tengelyen** levő pontok.



Ha egy komplex szám valós része 0, azaz ha a képzetes tengelyen van, akkor **tiszta képzetes számnak** nevezzük. Az i neve: **képzetes egység**, vagy **imaginárius egység**.

Definíció.

A $z = a + bi$ komplex szám **konjugáltján** a $\overline{z} = \overline{a + bi} = a + (-b)i = a - bi$ komplex számot értjük, tehát a konjugálás nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés.

Számolás kanonikus alakban (1.)

A kifejezésekkel való szokásos számolási szabályokhoz (asszociativitás, kommutativitás és disztributivitás) még hozzávesszük azt, hogy $i^2 = -1$.

- **Összeadás**: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- **Szorzás**: $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{-1} =$

  $(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$

Számolás kanonikus alakban (2.)

- **Reciprok**: Mivel az i a -1 négyzetgyöke, az osztásnál a gyöktelenítésnél használt lépést hajtjuk végre, beszorzunk a számlálót és a nevezőt is a nevező konjugáltjával.
  Legyen $z = a + bi \neq 0$ komplex szám, ekkor

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2 i^2} = \\ = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

Példa.

$$\frac{2 + 3i}{1 + 4i} = \frac{2 + 3i}{1 + 4i} \cdot \frac{1 - 4i}{1 - 4i} = \frac{2 - 12i^2 - 8i + 3i}{1^2 + 4^2} = \frac{14 - 5i}{17} = \frac{14}{17} - \frac{5}{17}i$$

Komplex számtest

Megjegyzés.

Azokat a számhalmazokat, ahol elvégezhető a négy alapművelet (összeadás, kivonás, szorzás, osztás), és érvényesek rá a szokásos tulajdonságok (összeadás, szorzás: asszociatív, kommutatív, szorzás disztributív az összeadásra vonatkozóan) **számtesteknek** nevezzük. Számtest például $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R}$, valamint $\mathbb{C}$ is számtest. (Az egész számok halmaza nem számtest, mert az osztás kivezet a halmazból.)

Definíció.

A $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám **abszolút értékén** a

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

nemnegatív valós számot értjük. Ez a komplex számsíkon a z origótól való távolsága.

Tétel.

Legyen $u, v, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Ekkor

(1) $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$;

(2) $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$;

(3) $\overline{\overline{u}} = u$;

(4) $\overline{u} = u \iff u \in \mathbb{R}$;

(5) $u + \overline{u} = 2\mathrm{Re}\,(u)$;

(6) $|\overline{u}| = |u|$;

(7) $|u| = \sqrt{u\overline{u}}$;

(8) $|uv| = |u| \cdot |v|$;

(9) $1/z = \overline{z}/\left|z\right|^2$;

(10) $|u + v| \leq |u| + |v|$.

Tétel.

Tetszőlegesen adott u komplex szám esetén a

$$z^2 = u$$

egyenlet mindig megoldható a komplex számok körében.

Bizonyítás.

A z komplex számot kanonikus alakban keressük $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, továbbá az adott z komplex szám kanonikus alakja legyen $u = a + bi$, ekkor

$$\begin{aligned} (x+yi)^2 &= a + bi \\ x^2 + 2xyi + (yi)^2 &= a + bi \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= a + bi. \end{aligned}$$

A valós és képzetes részek megegyeznek:

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{és} \quad 2xy = b.$$

Ha $b = 0$, akkor a $z^2 = a$ egyenletet kell megoldani, amit az $(\pm i)^2 = -1$ felhasználásával negatív a esetén is meg tudunk oldani komplex számok körében: $z = \pm\sqrt{|a|}i$. Nemnegatív a esetén pedig a szokásos módon $z = \pm\sqrt{a}$.

Ha $b \neq 0$, akkor $x \neq 0$. Ekkor a 2. egyenletből kifejezhetjük y-t, és behelyettesíthetjük az 1. egyenletbe.

Bizonyítás folyt.

A behelyettesítés után a következőt kapjuk:

$$\begin{array}{rcll} x^2 - \left(\frac{b}{2x}\right)^2 & = & a & \mid \cdot(2x)^2 \\ 4x^4 - b^2 & = & 4ax^2 & \mid -4ax^2 \\ 4x^4 - 4ax^2 - b^2 & = & 0 & \\ 4(x^2)^2 - 4ax^2 - b^2 & = & 0 & \end{array}$$

Az x^2-re vonatkozóan egy másodfokú egyeneletet kaptunk. Azt kell vizsgálnunk, van-e mindig pozitív megoldása ennek a másodfokú egyenletnek, hiszen x-nek valós számnak kell lennie, és $x \neq 0$.

- Az egyenlet diszkriminánsa: $D = (-4a)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-b^2) = 16(a^2 + b^2) \geqslant 0$, tehát van megoldás.
- A megoldóképlet szerint $x_{1,2}^2 = \frac{4a \pm \sqrt{16(a^2+b^2)}}{8} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$, és $\sqrt{a^2+b^2} > |a|$, mivel $b^2 > 0$ $(b \neq 0)$. Tehát $x^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} > 0$ tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén, így $x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, és $y = \frac{b}{2x} \in \mathbb{R}$.

Példa.

Megadjuk a következő egyenletek megoldását kanonikus alakban.

- $z^2 = -5$. Ekkor $z = \sqrt{-5}$, így $z = \pm\sqrt{5}i$.
- $z^2 = -9 + 12i$. A z-t $x + yi$ alakban keressük, tehát

$$\begin{aligned} (x+yi)^2 &= -9+12i \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= -9+12i, \end{aligned}$$

tehát $x^2 - y^2 = -9$ és $2xy = 12$, amiből $y = \frac{6}{x}$ $(x \neq 0)$. Visszahelyettesítve az 1. egyenletbe: $x^2 - \frac{36}{x^2} = -9$, majd x^2-tel beszorozva és átrendezve: $(x^2)^2 + 9x^2 - 36 = 0$. Az egyenlet megoldásai közül a pozitívat tekintjük:

$$x^2 = \frac{-9 + \sqrt{81 + 4 \cdot 36}}{2} = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2} = \frac{-9 + 15}{2} = 3.$$

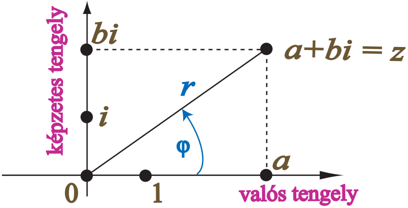
Így $x = \pm\sqrt{3}$ és $y = \pm\frac{6}{\sqrt{3}} = \pm\frac{6\sqrt{3}}{3} = \pm 2\sqrt{3}$.
Az egyenlet megoldásai: $z_1 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i$ és $z_2 = -\sqrt{3} - 2\sqrt{3}i$.

Példa.

Adjuk meg a következő törtet kanonikus alakban.

$$
\begin{aligned}
\frac{(2-i)^2}{(1+i)^3} &= \frac{4-4i-1}{1+3i+3i^2+i^3} = \frac{3-4i}{1+3i-3-i} = \\
&= \frac{3-4i}{-2+2i} = \frac{(3-4i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} = \\
&= \frac{-6-6i+8i-8}{2^2+2^2} = \frac{-14+2i}{8} = \\
&= -\frac{7}{4}+\frac{1}{4}i.
\end{aligned}
$$

Trigonometrikus, exponenciális alak



Definíció.

A $z \neq 0$ komplex szám **argumentuma** az a forgásszög, amelyet a valós tengely pozitív részével a helyvektora bezár. Az ábrán φ. (Ez 2π egész számú többszöröseinek erejéig egyértelműen meghatározott.)

Az ábráról leolvasható, hogy $z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i$.

Definíció.

Ha a $z \neq 0$ komplex szám argumentuma φ és az abszolút értéke r, akkor $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a komplex szám **trigonometrikus alakja**.

A 0 komplex számnak nincs trigonometrikus alakja!

Példa.

Megadjuk trigonometrikus alakban a következő komplex számokat.

- Legyen $z = 1 + i$. Ekkor $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, és

$$z = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \, (\cos\varphi + i \sin\varphi) \implies \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

  Tehát $z = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$.

- Legyen $z = 1 + \sqrt{3} i$. Ekkor $r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, és

$$z = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 2 \, (\cos\varphi + i \sin\varphi) \implies \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

  Tehát $z = 2 \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right)$.

Exponenciális alak

Definíció.

Ha a $z \neq 0$ komplex szám argumentuma φ és abszolút értéke r, akkor $z = re^{\varphi i}$ a komplex szám **exponenciális alakja**.

Példa.

Az előző példában meghatároztuk a $1 + i$ és a $1 + \sqrt{3}i$ komplex számok trigonometrikus alakját (tehát ismerjük az abszolút értéküket és az argumentumukat), így az exponenciális alak könnyen felírható:

- $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.
- $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

Mivel a trigonometrikus és az exponenciális alakot is a komplex szám argumentuma és abszolút értéke határozza meg, így azok az állítások, amit az egyik alakra megfogalmazunk, a másikra is érvényesek. A továbbiakban a kettő közül csak a trigonometikus alakkal foglalkozunk.

Számolás trigonometrikus alakban

Tétel.

Ha $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ és $u = s(\cos\psi + i\sin\psi)$ nemnulla komplex számok ($r, s > 0$ valós számok, és $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$), akkor

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),\\
z \cdot u &= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big),\\
\frac{1}{z} &= \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)),\\
\frac{z}{u} &= \frac{r}{s}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)).
\end{aligned}$$

Hasonló egyenlőségek érvényesek az exponenciális alakban felírt komplex számokra.

Számolás trigonometrikus alakban (bizonyítás)

Bizonyítás.

Csak a szorzást bizonyítjuk. Az addíciós tételeket kell használnunk:

$$\begin{aligned} z \cdot u &= r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)\cdot s(\cos\psi + i\,\sin\psi) = \\ &= rs((\cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi) + i(\cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi)) = \\ &= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi)\big). \end{aligned}$$

Megjegyzés.

A szorzat trigonometrikus alakjára vonatkozó képletből adódik, hogy rögzített $v = \cos\psi + i\,\sin\psi$ nemnulla egységnyi abszolút értékű komplex szám esetén a $z \mapsto z \cdot v$ leképezés nem más, mint az origó körüli ψ szögű forgatás a komplex számsíkon.

Példa.

Kiszámítjuk ugyanazt a törtet trigonometrikus és kanonikus alakban is. Felhasználjuk, hogy a számláló és a nevező trigonometrikus alakját egy korábbi példában megadtuk.

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1+\sqrt{3}-i+\sqrt{3}i}{1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

A két alakot összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Komplex számok elektronikus teszt (1. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak-e, ha

$$z_1 = 5 - 4i, \quad z_2 = -3 + i, \quad z_3 = -3 - 5i.$$

(1 pont jár, ha mindhárom válasz helyes, egyébként 0.)

- $(z_1 - z_2) \cdot \overline{z_3} = 1 + 54i.$
- $\dfrac{\mathrm{Im}\,(z_1) + z_2}{z_3} = \dfrac{8}{17} - \dfrac{19}{17}i.$
- $\dfrac{z_2}{\overline{z_3}} \neq \dfrac{24}{17} + \dfrac{6}{17}i.$

E-teszt.

$$z_1 = 5 - 4i, \quad z_2 = -3 + i, \quad z_3 = -3 - 5i.$$

- $(z_1 - z_2) \cdot \overline{z_3} = (5 - 4i - (-3 + i)) \cdot \overline{(-3 - 5i)} =$
  $= (8 - 5i) \cdot (-3 + 5i) = -24 + 40i + 15i - 25i^2 = -24 + 25 + 55i =$
  $= 1 + 55i \neq 1 + 54i$, így **hamis** az állítás.

- $\dfrac{\mathrm{Im}\,(z_1) + z_2}{z_3} = \dfrac{-4 + (-3 + i)}{-3 - 5i} = \dfrac{-7 + i}{-3 - 5i} \cdot \dfrac{-3 + 5i}{-3 + 5i} =$
  $= \dfrac{21 - 38i + 5i^2}{9 + 25} = \dfrac{16 - 38i}{34} = \dfrac{8}{17} - \dfrac{19}{17}i$, így **igaz** az állítás.

- $\dfrac{z_2}{\overline{z_3}} = \dfrac{-3 + i}{-3 + 5i} = \dfrac{-3 + i}{-3 + 5i} \cdot \dfrac{-3 - 5i}{-3 - 5i} = \dfrac{9 + 12i - 5i^2}{9 + 25} = \dfrac{14 + 12i}{34} =$
  $= \dfrac{7}{17} + \dfrac{6}{17}i \neq \dfrac{24}{17} + \dfrac{6}{17}i$, így **igaz** az állítás.