Leképezések, Számosságok

Kátai-Urbán Kamilla

7. előadás

Definíció.

Tetszőleges A, B halmazokra az $A \times B$ halmaz részhalmazait A-ból B-be menő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Az A halmaz a megfeleltetés **indulási halmaza**, B pedig az **érkezési halmaza**.

Példa.

Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazból a $B = \{1, 2, 3, 4\}$ halmazba menő megfeleltetések pontosan a $P(A \times B)$ elemei, azaz $2^{12} = 4096$ darab van belőlük. Például, az $\emptyset$ is megfeleltetés A-ból B-be.

Definíció.

Egy $\rho \subseteq A \times B$ megfeleltetést A-ból B-be menő **parciális leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$-ra létezik **legfeljebb egy** $b \in B$, amelyre $(a, b) \in \rho$.

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, ekkor a $\rho = \{(1, 4), (3, 4)\} \subseteq A \times B$ megfeleltetés parciális leképezés. Mivel minden A-beli elem esetén 5 lehetőség közül választhatunk (nem rendelünk hozzá semmit, vagy B valamelyik elemét rendeljük hozzá), így A-ból B-be menő parciális leképezésből $5^3 = 125$ darab van. Az $\emptyset$ is parciális leképezés A-ból B-be.

Leképezés

Definíció.

A $\varphi \subseteq A \times B$ megfeleltetést A-ból B-be menő **leképezésnek** nevezünk, ha bármely $a \in A$-ra létezik pontosan egy $b \in B$, amelyre $(a, b) \in \varphi$.

Jelölés.

Leképezések esetén a $\varphi \subseteq A \times B$ helyett a $\varphi\colon A \to B$ jelölés használjuk. Továbbá $(a, b) \in \varphi$ helyett azt mondjuk hogy az a elem φ melletti képe b, és azt írjuk, hogy $a\varphi = b$ vagy $a \mapsto b$. Ekkor azt is mondhatjuk, hogy a b elem őse az a.

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, ekkor a $\varphi = \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\} \subseteq A \times B$ megfeleltetés leképezés (és parciális leképezés is), általában helyette a $\varphi\colon A \to B$, $1\varphi = 4$, $2\varphi = 3$, $3\varphi = 4$ jelölést használjuk. Mivel minden A-beli elem esetén 4 lehetőség közül választhatunk, így A-ból B-be menő leképezésből $4^3 = 64$ darab van. Az $\emptyset$ NEM leképezés A-ból B-be.

Leképezésszorzás

Definíció.

A $\varphi\colon A \to B$ leképezés esetén az A indulási halmazt **értelmezési tartománynak** nevezzük. Az $\{a\varphi\colon a \in A\} \subseteq B$ halmaz neve **értékkészlet**.

Tétel.

Ha $\varphi\colon A \to B$ és $\psi\colon B \to C$ leképezések, akkor $\varphi\psi\colon A \to C$ is leképezés és tetszőleges $a \in A$ elemre $a(\varphi\psi) = (a\varphi)\psi$.

Megjegyzés.

Ha a leképezést mint valamilyen végrehajtandó folyamatot, cselekedetet képzeljük el, akkor a szorzásuk az egymás utáni végrehajtást jelenti. Például abban az esetben, amikor φ is és ψ is egy-egy számítógépes program, amely az inputhoz az outputot rendeli, a szorzatleképezés a két program egymás utáni végrehajtását jelenti úgy, hogy az első outputja a második inputja.

A leképezésszorzás műveleti tulajdonsága

Tétel.

A leképezések szorzása asszociatív, azaz tetszőleges $\varphi\colon A \to B$, $\psi\colon B \to C$ és $\tau\colon C \to D$ leképezésekre

$$(\varphi\psi)\tau = \varphi(\psi\tau)$$

teljesül, és mindkét oldalon $A \to D$ leképezés áll.

Példa.

Tekintsük az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazt, és a
$\varphi\colon A \to A, \quad 1\varphi = 2,\ 2\varphi = 3,\ 3\varphi = 1$ valamint a
$\sigma\colon A \to A, \quad 1\sigma = 2,\ 2\sigma = 1,\ 3\sigma = 3$ leképezéseket.

- $\varphi\sigma\colon A \to A, \quad 1\varphi\sigma = 1,\ 2\varphi\sigma = 3,\ 3\varphi\sigma = 2.$
- $\sigma\varphi\colon A \to A, \quad 1\sigma\varphi = 3,\ 2\sigma\varphi = 2,\ 3\sigma\varphi = 1.$

A leképezések szorzása nem kommutatív.

Injektív leképezés

Definíció.

A $\varphi\colon A \to B$ leképezés **injektív**, ha A különböző elemeinek képe különböző, azaz ha $(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 \neq a_2 \ \to \ a_1\varphi \neq a_2\varphi)$.

Az injektvitás más szóval azt jelenti, ha két elem képe egyenlő, akkor maguk a kiindulási elemek is egyenlőek:
$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varphi = a_2\varphi \ \to \ a_1 = a_2)$.
Nyíldiagramon az injektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy A minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki, és B minden elemébe legfeljebb egy nyíl érkezik.

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, ekkor a $\varphi\colon A \to B$, $1\varphi = 4$, $2\varphi = 3$, $3\varphi = 2$ leképezés injektív. Az A-ból B-be menő injektív leképezésből $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ darab van, mivel különböző elemekhez különböző képet kell rendelni.

Szürjektív leképezés

Definíció.

A $\varphi\colon A \to B$ leképezés **szürjektív**, ha B minden eleme előfordul képelemként, azaz ha $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varphi = b)$. Más szóval, ha a leképezés értékkészlete megegyezik az érkezési halmazával.

Nyíldiagramon a szürjektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy A minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki, és B minden elemébe megy nyíl.

Példa.

Ha $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, akkor A-ból B-be nem adható meg szürjektív leképezés, de B-ből A-ba igen. Például $\varphi\colon B \to A$, $1\varphi = 2$, $2\varphi = 3$, $3\varphi = 2$, $4\varphi = 1$ szürjektív leképezés. Hány B-ből A-ba menő szürjektív leképezés van? Vonjuk ki a B-ből A-ba menő öszes leképezés számából (3^4) azoknak a leképezéseknek a számát, amikor legalább az egyik elem nem áll elő képként (2^4), mindhárom kimaradó elem esetén. Így viszont azt az esetet, amikor 1 elemű az értékkészlet a szükségesnél többször levontuk, ezért hozzá kell ismét adni. Tehát a B-ből A-ba menő szürjektív leképezésből: $3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 = 36$ darab van.

Bijektív leképezés

Definíció.

A φ leképezés **bijektív**, ha szürjektív és injektív is.

Nyíldiagramon a bijektív leképezés onnan ismerhető fel, hogy A minden eleméből pontosan egy nyíl indul ki, és B minden elemébe pontosan egy nyíl érkezik.

Példa.

Ha $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, akkor A-ból B-be nem adható meg bijektív leképezés, és B-ből A-ba sem.

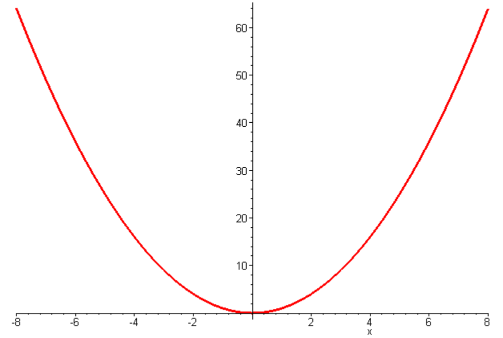
Példa.

Ha $A = \{1, 2, 3\}$, akkor a $\varphi \colon A \to A$, $1\varphi = 2$, $2\varphi = 3$, $3\varphi = 1$ leképezés bijektív. Az A-ból A-ba menő minden injektív leképezés már szürjektív is lesz, tehát az A-ból A-ba menő bijektív leképezések száma $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

Példa.

$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$

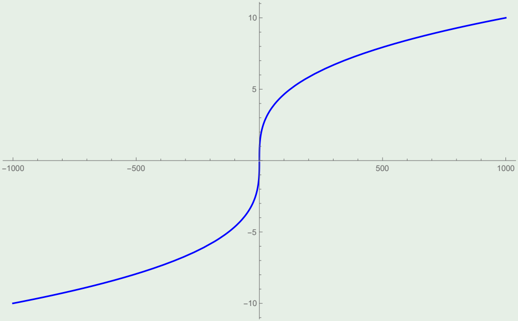
- **Nem injektív**, mert pl. a -1 és az 1 helyen azonos értékeket vesz fel.
- **Nem szürjektív**, mert negatív valós számokat nem vesz fel értékként.
- **Nem bijektív**.



Példa.

$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}$

- Mivel a függvény szigorúan monoton, minden értéket csak egyszer vesz fel, így **injektív**.
- Minden valós értéket felvesz így **szürjektív**, tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ elem őse $x = y^3$, mert $\sqrt[3]{y^3} = y$.
- **Bijektív**.



Az előző két példában olyan leképezések szerepeltek, amelyek ábrázolhatók voltak koordinátarendszerben függvényként. A függvények számhalmazok között megadott leképezések, de nem minden leképezés indulási és érkezési halmaza áll számokból.

Példa.

Jelölje $\mathbb{H}$ a sík háromszögeinek halmazát, $\mathbb{S}$ pedig a sík pontjainak halmazát. Tekintsük a következő leképezést:

$$\varphi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{S}, \qquad h \mapsto h \text{ körülírt körének középpontja.}$$

- A φ leképezés **nem injektív**, ugyanis különböző háromszögekhez tartozhat ugyanaz a pont a síkon. Pl. ha kiválasztok egy elemet $\mathbb{S}$-ből, és valamekkora (nem 0) sugárral kört rajzolok a pont körül, akkor a körvonalon kiválaszthatok többféleképpen is 3 pontot úgy, hogy háromszöget alkossanak. Tehát találhatok $\mathbb{H}$-nak különböző elemeit úgy, hogy ugyanaz a kép tartozik hozzájuk a φ szerint.
- A φ leképezés **szürjektív**, mert bárhogy választok egy pontot $\mathbb{S}$-ből a korábban leírt módszerrel, találhatok hozzá háromszöget (elemet $\mathbb{H}$-ból), amelynek a φ melletti képe a kiválaszott pont.
- Mivel a φ leképezés nem injektív, így **nem bijektív**.

Tétel.

Tetszőleges $\rho\colon A \to B$ és $\sigma\colon B \to C$ leképezésekre

(a) ha ρ és σ szürjektív, akkor $\rho\sigma$ is szürjektív,
(b) ha ρ és σ injektív, akkor $\rho\sigma$ is injektív,
(c) ha ρ és σ bijektív, akkor $\rho\sigma$ is bijektív,
(d) ha $\rho\sigma$ szürjektív, akkor σ szürjektív,
(e) ha $\rho\sigma$ injektív, akkor ρ injektív és
(f) ha $\rho\sigma$ bijektív, akkor ρ injektív és σ szürjektív.

Definíció.

Tetszőleges A halmazon definiáljuk az **identikus leképezést**:

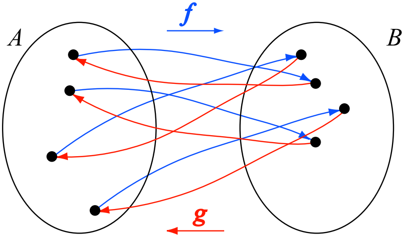
$$\mathrm{id}_A\colon A \to A,\ a \mapsto a.$$

Tétel.

Tetszőleges $\varphi\colon A \to B$ leképezésre $\mathrm{id}_A\varphi = \varphi$ és $\varphi\mathrm{id}_B = \varphi$.

Definíció.

Legyenek $\varphi : A \to B$ és $\psi : B \to A$ leképezések. Akkor mondjuk, hogy ψ **inverze** φ-nek, ha $\varphi\psi = \mathrm{id}_A$ és $\psi\varphi = \mathrm{id}_B$. Világos, hogy ez egy szimmetrikus viszony: ψ akkor és csak akkor inverze φ-nek, ha φ inverze ψ-nek.



Tétel.

Legyen $f : A \to B$ tetszőleges leképezés.

1. Akkor és csakis akkor létezik f-nek inverze, ha f bijektív.
2. Ha f bijektív, akkor egy és csakis egy inverze létezik, mégpedig az a $g : B \to A$ leképezés, amely tetszőleges $b \in B$ elemhez azt az egyértelműen meghatározott a elemet rendeli, amelyre $af = b$. (Azaz az inverz leképezés minden elemhez annak a kiindulási leképezés szerinti ősét rendeli. Azaz tetszőleges $a \in A$ és $b \in B$ esetén $bg = a$ akkor és csak akkor, ha $af = b$.)

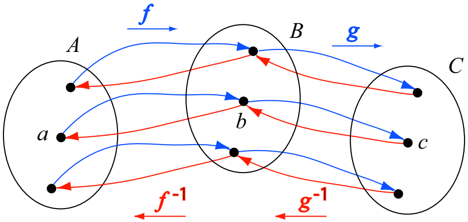
Mivel egy f bijektív leképezésnek pontosan egy inverze van, annak jelölésére az f^{-1} jelölést használjuk.

Tétel.

Tetszőleges $f : A \to B$ és $g : B \to C$ bijektív leképezésre

(a) f^{-1} is bijektív,

(b) $(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$.



Példa.

A $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ leképezésről korábban láttuk, hogy bijektív, ekkor $\varphi^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.

A Relációk témakörénél bevezettük a következő jelöléseket, és szerepelt az alábbi tétel:

Jelölés.

Legyen A tetszőleges halmaz, jelölje $\mathrm{Part}(A)$ az A-n értelmezhető osztályozások (más szóval partíciók) halmazát, $\mathrm{Eq}(A)$ pedig az A-n értelmezhető ekvivalenciarelációk halmazát.

Tétel.

- $\varphi\colon \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A), \quad \rho \mapsto A/\rho = \{a/\rho : a \in A\}.$
- $\psi\colon \mathrm{Part}(A) \to \mathrm{Eq}(A), \quad \mathcal{C} \mapsto \rho_{\mathcal{C}}$

A φ és a ψ leképezések bijektívek, amelyek egymás inverzei.

Számosságok

Huszárok és lovak

Példa.

A huszárezred elvonul az óvoda ablaka előtt. Meg tudja-e egy óvodás kapásból mondani, hogy miből van több, lóból vagy huszárból?

Kézenfekvő körülményeket feltételezve (pl. ló nem ül a huszáron, stb.) **igen**, hiszen minden lovon pontosan egy huszár ül és minden huszár lovon ül, tehát az ezredben ugyanannyi ló van, mint huszár. (Ez a szám általában nem 1000.)

Másképp fogalmazva: Legyen L a lovak, H a huszárok halmaza, és tekintsük a $\varphi = \{(\ell, h) \in L \times H : h \text{ rajta ül } \ell\text{-en}\}$ megfeleltetést. Ez leképezés (mert minden lovon ül huszár és pontosan egy), injektív (mert nincs olyan huszár, aki egyszerre több lovon ülne) és szürjektív (mert minden huszár lovon ül), tehát φ bijektív. Egy ilyen $\varphi\colon L \to H$ bijektív leképezés létezése az oka annak, hogy $|L| = |H|$, azaz, hogy a két halmaznak ugyanannyi eleme van.

A véges halmazok elemeit megszámolhatjuk. Pl. a balkezünk ujjainak halmaza esetén azt mondjuk, hogy ennek a halmaznak az elemszáma 5. Minden véges halmaznak van egy és csakis egy jólmeghatározott **elemszáma**. Egy halmaz véges, ha elemeit — az $\mathbb{N}_0$ elemeinek felhasználásával — meg tudjuk számolni. Ha egy halmaz nem ilyen, akkor végtelennek mondjuk.

A végtelen halmazok elemeit is meg szeretnénk számolni! Ekkor nem kaphatunk természetes számokat, ezért nem használható az „elemszám” elnevezés. Ehelyett a **számosság** elnevezést fogjuk használni. Tehát a számosság az elemszám megfelelője. Tetszőleges halmaznak lesz számossága, amely véges halmaz esetén persze az elemszámmal fog megegyezni. Más szóval: a véges számosságok pontosan a nemnegatív egész számok lesznek.

Először (annak a fogalomnak kellett kialakulnia), hogy mit jelent az, hogy két halmaznak „ugyanannyi eleme van”. Más szóval, mit jelent az, hogy két halmaz „számossága egyenlő”.

Az öt fogalma

Legyen az a halmaz, aminek az elemszámát keressük a jobb kezünk ujjainak halmaza. Majd a kiválasztott halmazzal egyenlő elemszámú halmazokat elnevezzük valahogy (esetünkben „ötelemű́eknek”). Tehát (legalábbis az őskorban, illetve a mai előadáson) nem mondjuk meg, mi az, hogy „öt”, hanem csak annyit mondunk meg, mi az, hogy „ötelemű” halmaz.

Ezt követően az „öt” nem más, mint az ötelemű halmazok közös tulajdonsága. (Azaz az „öt” fogalmát absztrakcióval definiáltuk — az ilyenfajta absztrakció teljesen megszokott az emberi gondolkodásban. Sok más fogalom is hasonlóan alakul ki.)

Ha jobb keze ujjainak halmaza és az elejtett mammutok halmaza között az ősember bijekciót tudott létesíteni, akkor azt mondta, hogy „öt”, és elégedett volt; nem elmélkedett olyan hiábavaló kérdésen, hogy mit jelent az „öt”. Hasonlóan járunk el a számosságok fogalmának kialakításakor is.

„Azonos számosságú" fogalma

Definíció.

Legyen A és B halmaz. Akkor mondjuk, hogy az A és B **számossága egyenlő**, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés. (Jelölése: $|A| = |B|$.)

Most elnevezünk egy számosságot (annak mintájára, ahogy a jobbkezünk ujjainak halmazával kapcsolatban egy számot elneveztünk „ötnek").

Definíció.

A természetes számok halmazának számosságát **megszámlálhatóan végtelennek** nevezzük és $\aleph_0$-lal jelöljük. (Kiejtve „alef null"; $\aleph$ a héber ábécé első betűje.)

Tétel.

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.

Számosság definíciója korrekt?

Az összes halmazból álló összesség nem halmaz, mert túl sok eleme van. Ezen úgy segítünk, hogy az ilyen túl nagy összességeket elnevezzük osztályoknak. A reláció fogalma nemcsak halmazon, hanem – minden változtatás nélkül – osztályon is értelmes.

Tétel.

Az összes halmazok $\mathcal{H}$-val jelölt osztályán az „egyenlő számosságúak" reláció, azaz az $\{(A,B) \in \mathcal{H}^2 : |A| = |B|\}$ reláció ekvivalenciareláció.

Bizonyítás.

Mivel tetszőleges A halmazra az identikus $A \to A$ leképezés bijektív, a reláció reflexív. Mivel bijektív leképezés inverze is bijektív, ezért szimmetrikus is. Végül mivel két bijektív leképezés szorzata szintén bijektív, ezért az az „egyenlő számosságúak" reláció tranzitív. Tehát ekvivalenciareláció.

Hatványhalmaz számossága

Vajon $\aleph_0$ az egyetlen végtelen számosság, vagy van másik is? Erre a kérdésre az alábbi tétel ad választ. Emlékezzünk vissza arra, hogy $P(A)$ az A halmaz hatványhalmazát (azaz összes részhalmazának halmazát) jelöli.

Tétel.

Tetszőleges (véges vagy végtelen) halmaz számossága nem egyenlő a hatványhalmazának számosságával. Azaz bármely A halmazra $|A| \neq |P(A)|$.

A tételt indirekt módon bizonyítjuk. Az indirekt bizonyítás (a teljes indukció mellett) a matematikai bizonyítások fontos típusa. Lényege: a bizonyítandó állítást tagadjuk. (Ez az indirekt feltevés.) Ezután az indirekt feltevésből ellentmondást vezetünk le. A kapott ellentmondásból következtetünk a bizonyítandó állításra.

$|A| \neq |P(A)|$ bizonyítása

Bizonyítás.

Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan halmaz, amelynek számossága megegyezik a hatványhalmazának számosságával. Legyen A egy ilyen halmaz. Ekkor tehát $|A| = |P(A)|$. Ezért létezik $A \to P(A)$ bijekció. Több ilyen $\varphi : A \to P(A)$ is lehet, de egyet lerögzítünk.
Legyen $B = \{x \in A : x \notin x\varphi\}$.
Mivel $B \in P(A)$ és φ szürjektív, van olyan $c \in A$, hogy $c\varphi = B$. Kérdés: vajon $c \in B$?
Ha $c \in B$, akkor — a B definíciója miatt $c \notin c\varphi = B$; ez nem lehet.
Tehát $c \notin B = c\varphi$, de akkor — a B definíciója miatt $c \in B$; ez sem lehet.
Tehát a „vajon $c \in B$” kérdésre se igaz, se hamis válasz nem adható, ami ellentmondás.

Georg Cantor (1845–1918) bizonyítása. Ő a halmazelmélet megalapítója.

Többféle végtelen

Most már tudjuk, hogy nem $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ az egyetlen végtelen számosság, hiszen $P(\mathbb{N})$ eltérő számosságú, és nyilván $P(\mathbb{N})$ is végtelen halmaz (mert már az egyelemű részhalmazai is végtelen sokan vannak).
Az alábbi tételt a híres **Cantor-féle átlós módszer** bizonyítja.

Tétel.

$\aleph_0 = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.

Cantor-féle átlós módszer

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció, $n\varphi = r_n$:

r_1: 0,2078795 ⋯
r_2: 0,6931471 ⋯
r_3: 0,7041067 ⋯
r_4: 0,7853981 ⋯
r_5: 0,3678794 ⋯
r_6: 0,6449340 ⋯
r_7: 0,6180339 ⋯
⋮

Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója a következő: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.

Cantor-féle átlós módszer

Bizonyítás.

Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Ekkor létezik $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijekció, $n\varphi = r_n$:

r_1: 0,2078795 $\cdots$
r_2: 0,6931471 $\cdots$
r_3: 0,7041067 $\cdots$
r_4: 0,7853981 $\cdots$
r_5: 0,3678794 $\cdots$
r_6: 0,6449340 $\cdots$
r_7: 0,6180339 $\cdots$
$\vdots$
b: 0,4454454 $\cdots$

Definiáljunk egy b valós számot, amelynek a tízes számrendszerbeli alakja $0, b_1 b_2 b_3 \ldots$. A b_n-ek ($n \in \mathbb{N}$) definíciója a következő: ha az $n\varphi$ valós számban az n-edik tizedesjegy 4, akkor legyen $b_n = 5$, ellenkező esetben pedig legyen $b_n = 4$.

Cantor-féle átlós módszer (folyt.)

Bizonyítás (folyt.).

$$
\begin{aligned}
r_1&: 0{,}2078795\cdots\\
r_2&: 0{,}6931471\cdots\\
r_3&: 0{,}7041067\cdots\\
r_4&: 0{,}7853981\cdots\\
r_5&: 0{,}3678794\cdots\\
r_6&: 0{,}6449340\cdots\\
r_7&: 0{,}6180339\cdots\\
&\ \vdots\\
b&: 0{,}4454454\cdots
\end{aligned}
$$

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijektív, ezért szürjektív, és így b-nek is van őse. Azaz valamely $n \in \mathbb{N}$-re $b = n\varphi$. De ez ellentmondásra vezet: ha $n\varphi$ n-edik tizedesjegye 4, akkor b n-edik tizedesjegye 5 és ezért $b \neq n\varphi$, ha pedig $n\varphi$ n-edik tizedesjegye nem 4, akkor b n-edik tizedesjegye 4 és megintcsak $b \neq n\varphi$.

Számosságok összehasonlítása

Definíció.

Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| \leq |B|$, ha létezik $A \to B$ injektív leképezés.
Azt mondjuk, hogy az A halmaz **számossága kisebb**, mint a B halmaz számossága, jelben $|A| < |B|$, ha $|A| \neq |B|$ (azaz nem létezik $A \to B$ bijekció) és $|A| \leq |B|$ (de létezik $A \to B$ injekció).

Példa.

- $|\{1,2,3\}| < |\{1,2,3,4\}|$, hiszen a $\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$ leképezés injektív, bijekció pedig nincs.
- Tetszőleges A halmazra $|A| < |P(A)|$, mert már láttuk, hogy $|A| \neq |P(A)|$, az $A \to P(A)$, $a \mapsto \{a\}$ leképezés pedig injektív.
- $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, hiszen már láttuk, hogy $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$, továbbá az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto n$ leképezés injektív.

Definíció.

Az A halmaz **véges**, ha létezik olyan n nemnegatív egész, hogy $|A| = n$. Az A halmaz **megszámlálhatóan végtelen**, ha $|A| = |\mathbb{N}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \aleph_0$. Az A halmaz **megszámlálható**, ha A véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az A halmaz **kontinuum számosságú**, ha $|A| = |\mathbb{R}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \mathfrak{c}$.

Tétel.

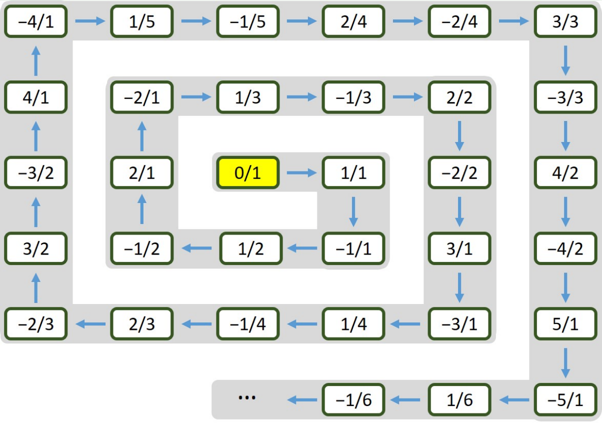
Legyen A halmaz. Akkor és csak akkor teljesül, hogy $|A| = \aleph_0$, ha A végtelen és sorozatba szedhető, azaz megadható egy, az $\mathbb{N}$ elemeivel indexelt $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ sorozat, amely A minden egyes elemét tartalmazza (esetleg többször is).

Példa.

Az egész számok halmaza megszámláhatóan végtelen, azaz $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, mivel végtelen és a $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$; minden elemét tartalmazza.

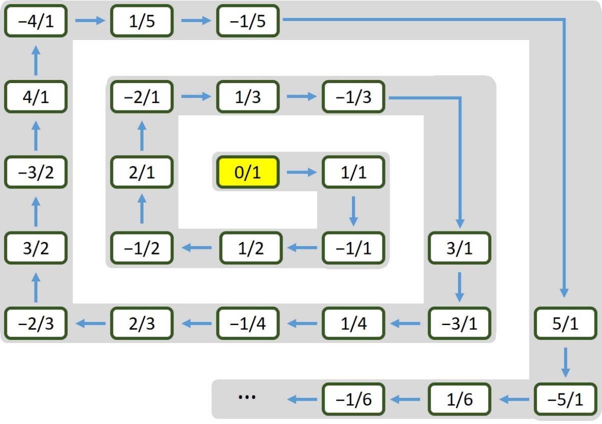
Példa.

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, azaz $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, mert végtelen és a nyilak mentén sorozatba szedhető.



Példa.

A racionális számok halmaza megszámlálhatóan végtelen, azaz $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, mert végtelen és a nyilak mentén sorozatba szedhető.



Számosságaritmetika Alaptétele.

Ha A és B halmazok és legalább az egyik végtelen (és a másik nem üres), akkor $|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|)$.

Tétel.

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$.

Tétel.

$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |P(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

$|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = \mathfrak{c}$ bizonyítása.

A Számosságaritmetika Alaptételét felhasználva

$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z}| = \max(|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}|, |\mathbb{Z}|),$$

de $|\mathbb{Z}| = \aleph_0 < \mathfrak{c}$, így $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = \mathfrak{c}$.

Jelölés.

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \leqslant b$. Jelölje $(a; b)$ a valós számegyenes a kezdőpontú, b végpontú intervallumát úgy, hogy a végpontok ne tartozzanak bele a halmazba. Ha mindkét végpont is a halmaz eleme, akkor az $[a; b]$ jelölést használjuk, míg ha csak az egyik végpont, akkor: $[a; b)$ vagy $(a; b]$.

Állítás.

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$ esetén

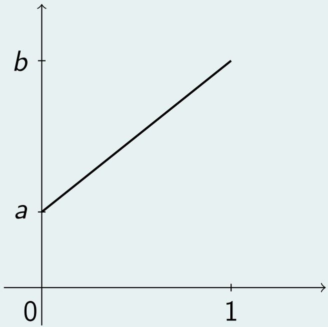
$$|(0; 1)| = |(a; b)|.$$

Bizonyítás.

Olyan bijektív leképezést kell megadnunk ami a $(0; 1)$ intervallumot az $(a; b)$ intervallumra képezi le. Végtelen sok ilyen bijektív leképezés létezik, de az egyik legegyszerűbb, ha egy lineáris függvény adja meg a hozzárendelést.

Bizonyítás (folyt).

Többféle lineáris függvényt meg lehet adni, tekintsük például a következőt.

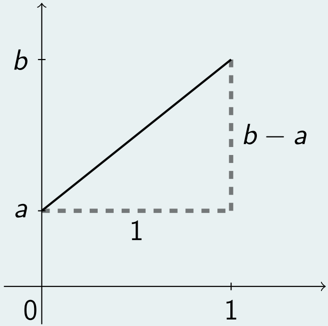


$$\alpha : (0;1) \to (a;b) \quad x\alpha = (b-a)x + a$$

Megjegyzés: Az ábrán a-t és b-t pozitív számként jelöltük, de természetesen ugyanezt a függvényt kapjuk akár csak a, akár mindkét érték negatív.

Bizonyítás (folyt).

A lineáris függvény meredeksége és tengelymetszete leolvasható az ábráról.



$$\alpha\colon (0;1) \to (a;b) \quad x\alpha = (b-a)x + a$$

Megjegyzés: Az ábrán a-t és b-t pozitív számként jelöltük, de természetesen ugyanezt a függvényt kapjuk akár csak a, akár mindkét érték negatív.

Egy meglepő tétel: a $(0;1)$ intervallum számossága megegyezik a valós számok számosságával.

Tétel.

$$|(0;1)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$$

Bizonyítás.

Keresünk először egy függvényt, ami egy $(a;b)$ típusú intervallumról az $\mathbb{R}$-re képez bijektív módon, például:

$$\beta\colon \left(-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R} \quad x\beta = \operatorname{tg} x.$$

Az előző állítás bizonyításában szereplő α lineáris függvény felhasználásával pedig a $(0;1)$ és a $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ között meg tudunk adni egy bijekciót:

$$\gamma\colon (0;1) \to \left(-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right) \quad x\gamma = \pi x - \tfrac{\pi}{2}.$$

Mivel bijektív leképezések szorzata bijektív, így a $\delta = \gamma\beta$ leképezés is bijektív:

$$\delta\colon (0;1) \to \mathbb{R} \quad x\delta = (x\gamma)\beta = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Felhasználva az előző Állítást és az előző Tételt, kapjuk az alábbit.

Tétel.

Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$ esetén

$$|(a; b)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$$

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak illetve hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- Az $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto |n-3|+1$ leképezés injektív. **Hamis**, mert $1 \mapsto |1-3|+1=3$ és $5 \mapsto |5-3|+1=3$.
- Az $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto (x-1,1)$ leképezés szürjektív. **Hamis**, mert $\mathbb{Z}^2$ azon elemei állnak csak elő képként, amelyiknek a második komponense 1. Például $(1,2)$-nek nincs őse.
- Az $\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $(x,y) \mapsto |x-y|$ leképezés szürjektív. **Igaz**, mert tetszőleges $n \in N_0$ esetén $(n,0) \mapsto |n-0| = n$.

Leképezések elektronikus teszt (2. fel.)

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak illetve hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- Az $\{1, 2, 3\}$ halmazról az $\{1, 2, 3\}$ halmazba 20 szürjektív leképezés létezik. **Hamis**. Ha A véges halmaz, akkor A-ból A-ba minden szürjektív leképezés injektív is (azaz bijektív is). Mivel injektív leképezés esetén különböző elemek képe különböző, így $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ injektív (szürjektív) leképezés van.
- Létezik $\mathbb{Q}^7 \to \mathbb{R}$ bijektív leképezés. **Hamis**, mert $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, és a Számosságaritmetika Alaptételét felhasználva $|\mathbb{Q}^7| = \aleph_0$, de $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c} > \aleph_0 = |\mathbb{Q}^7|$. Tehát nem létezik bijektív leképezés.
- $|(1; 4)| = |(1; 2)|$. **Igaz**, mert egy korábbi tétel szerint tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$ esetén $|(a; b)| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$.