Relációk (2.)

Ekvivalenciareláció, Részbenrendezés, Lezárt

5. előadás

Osztályozás, Ekvivalenciareláció (Ismétlés)

Definíció.

Legyen A tetszőleges halmaz, és legyen $\mathcal{C} \subseteq P(A)$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ **osztályozás** az A halmazon vagy más szóval **osztályozása** az A halmaznak ($\mathcal{C}$ elemei az **osztályok**), ha a $\mathcal{C}$-beli halmazok

(1) nem üresek,

(2) páronként diszjunktak,

(3) egyesítésük A (azaz minden elem benne van egy osztályban).

Szokás az osztályozást **partíciónak** vagy **faktorhalmaznak** is nevezni.

Definíció.

Legyen ρ reláció az A halmazon. Azt mondjuk, hogy ρ **ekvivalenciareláció**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Osztályozáshoz ekvivalenciareláció

Tétel.

Legyen adott egy $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon. A

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(a, b) \in A \times A \mid \exists X \in \mathcal{C}, \text{ hogy } a, b \in X\}$$

reláció ekvivalenciareláció.

Példa.

Legyen A egy iskola tanulóinak halmaza, és $\mathcal{C}$ elemei legyenek az iskola osztályai. Ekkor a $\mathcal{C}$ osztályozás által meghatározott ekvivalenciareláció:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ és } b \text{ osztálytársak, vagy } a = b\}.$$

Példa.

A „Halmazok” előadásban szerepelt, az $A = \{1, 2, 3\}$ halmaz összes osztályozása (partíciója).

$$\mathcal{C}_1 = \{\{1, 2, 3\}\},$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \mathcal{C}_4 = \{\{1, 3\}, \{2\}\},$$

$$\mathcal{C}_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Az osztályozásokhoz tartozó ekvivalenciarelációk:

- $\rho_{\mathcal{C}_1} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$,
- $\rho_{\mathcal{C}_2} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,
- $\rho_{\mathcal{C}_3} = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$,
- $\rho_{\mathcal{C}_4} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2)\}$,
- $\rho_{\mathcal{C}_5} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

Példa.

A $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{-1, 1\}, \{-2, 2\}, \ldots\}$ osztályozáshoz a

$$\begin{aligned} \rho &= \{(0,0)\} \cup \{(z,z) \colon z \in \mathbb{Z}\} \cup \{(z,-z) \colon z \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon |a| = |b|\} \end{aligned}$$

ekvivalenciareláció tartozik.

Ekvivalenciarelációhoz osztályozás

Definíció.

Legyen $\rho \subseteq A^2$ ekvivalenciareláció. Az $a \in A$ **elemet tartalmazó osztályon (vagy blokkon)** az $a/\rho = \{b \in A \mid (b, a) \in \rho\}$ halmazt értjük. A ρ blokkjainak $A/\rho := \{a/\rho : a \in A\}$ halmazát az A halmaz ρ szerinti **faktorhalmazának** vagy ρ szerinti **osztályozásának** nevezzük.

Példa.

Tekintsük az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ekvivalenciarelációt. Ekkor $1/\rho = \{b \in A \mid (b, 1) \in \rho\} = \{1, 2\}$. Hasonlóan $2/\rho = \{1, 2\}$ és $3/\rho = \{3\}$. Tehát definíció szerint

$$A/\rho = \{1/\rho, 2/\rho, 3/\rho\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{3\}\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\},$$

ami osztályozása A-nak.

Tétel.

Tetszőleges $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációra A/ρ osztályozása A-nak.

Példa.

Megadjuk a $\mathbb{Z}$ halmazon értelmezett $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 3 \mid x - y\}$ ekvivalenciához tartozó osztályozást.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/\rho = \{\, &\{\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots\},\\ &\{\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots\},\\ &\{\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots\}\,\} =\end{aligned}$$

$$= \{\, \{3k\colon k \in \mathbb{Z}\}, \{3k + 1\colon k \in \mathbb{Z}\}, \{3k + 2\colon k \in \mathbb{Z}\}\,\}$$

Ekvivalenciareláció és osztályozás kapcsolata

Láttuk, hogy az ekvivalenciarelációk osztályozást (faktorhalmazt), az osztályozások (faktorhalmazok) pedig ekvivalenciarelációkat határoznak meg. A következő tétel azt fejezi ki, hogy – a rögzített A halmazon értelmezett – ekvivalenciák és osztályozások lényegében ugyanazok.

Jelölés.

Legyen A tetszőleges halmaz, jelölje $\mathrm{Part}(A)$ az A-n értelmezhető osztályozások (más szóval partíciók) halmazát, $\mathrm{Eq}(A)$ pedig az A-n értelmezhető ekvivalenciarelációk halmazát.

Tétel.

A korábbi tételek alapján:

- $\mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A), \quad \rho \mapsto A/\rho = \{a/\rho : a \in A\}.$
- $\mathrm{Part}(A) \to \mathrm{Eq}(A), \quad \mathcal{C} \mapsto \rho_{\mathcal{C}}$

A két halmaz elemeinek megfeleltetésekor a következő kapcsolat áll fenn: $\rho \rightsquigarrow A/\rho \rightsquigarrow \rho_{A/\rho}$, ahol $\rho = \rho_{A/\rho}$, és $\mathcal{C} \rightsquigarrow \rho_{\mathcal{C}} \rightsquigarrow A/\rho_{\mathcal{C}}$, ahol $\mathcal{C} = A/\rho_{\mathcal{C}}$.

Ekvivalencia és faktorhalmaz

Példa.

Meghatározzuk, hogy hány ekvivalenciareláció van 3-elemű halmazon. Mivel az ekvivalenciák és az osztályozások egymásnak megfeleltethetők, valamint azt már láttuk korábban, hogy a 3-elemű halmazon 5 osztályozás van, így ekvivalenciarelációból is 5 van 3-elemű halmazon.

A fogalmak — nemcsak a matematikában, hanem azon kívül is — gyakran úgy alakulnak ki, hogy veszünk egy $\rho \subseteq A^2$ ekvivalenciarelációt, és az A/ρ osztályozás elemeinek nevet adunk.
Például, ha A a sík egyeneseinek halmaza és ρ a párhuzamossági reláció (amelyik ekvivalenciareláció), akkor egy egyenes ρ szerinti blokkját szokás az egyenes irányának nevezni.
Hamarosan látni fogjuk, hogy pl. a számok fogalma is így alakult ki.

Részbenrendezett halmaz, Lezárt

Részbenrendezés, rendezés

A (részben)rendezések a hierarchia fogalmát ragadják meg matematikailag. Ez a fogalom az informatikában is fellép, hiszen pl. a szoftverek is hierarchikus rendbe szervezett kisebb egységekből (szubrutin, modul, eljárás, stb.) épülnek fel.

Definíció.

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

Definíció.

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

Definíció.

Legyen ρ részbenrendezés az A halmazon. Az $(A; \rho)$ párt **részbenrendezett halmaznak** nevezzük.

Példa.

Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$ reláció részbenrendezés, de nem rendezés, mert $(2, 3), (3, 2) \notin \rho$.

Példa.

- A nemnegatív egészek $\mathbb{N}_0$ halmazán az oszthatóság reláció részbenrendezés, tehát az $(\mathbb{N}_0; \mid)$ részbenrendezett halmaz. Azonban az oszthatóság nem rendezés ezen a halmazon (ld. előző előadás),
- Az egészek halmazán az oszthatóság reláció nem részbenrendezés, mert nem antiszimmetrikus: $1 \mid -1$ és $-1 \mid 1$.

Példa.

Tetszőleges A halmazra a $P(A)$ hatványhalmazon a $\subseteq$ részhalmaz reláció részbenrendezés. A $P(A)$ hatványhalmaz tetszőleges részhalmaza a tartalmazásra nézve részbenrendezett halmaz.

Példa.

Legyen A rögzített halmaz, és tekintsük az összes ekvivalenciarelációk halmazát A-n:

$$\mathrm{Eq}(A) = \{\rho \subseteq A \times A \mid \rho \text{ ekvivalenciareláció}\}.$$

Ekkor $(\mathrm{Eq}(A);\ \subseteq)$ részbenrendezett halmaz.

Definíció.

Azt mondjuk, hogy az a és b elemek **összehasonlíthatók** a $\leqslant$ részbenrendezésben, ha $a \leqslant b$ vagy $b \leqslant a$. Tehát egy részbenrendezés pontosan akkor dichotóm, ha bármely két eleme összehasonlítható.

Példa.

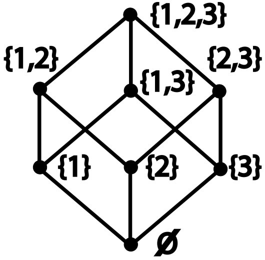
A 12 egész szám pozitív osztóinak halmazán az oszthatósági reláció részbenrendezésben, a 2 és 3 egészek nem összehasonlítható elemek, míg 2 és 6 összehasonlíthatóak.

Definíció.

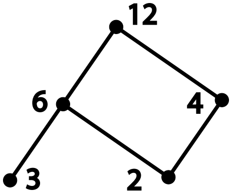
Legyen ρ részbenrendezés az A halmazon. Ha ez nem vezet félreértéshez, akkor $(a, b) \in \rho$ helyett $a \leqslant b$-t írunk, és az $a < b$ jelölést használjuk arra, hogy $a \leqslant b$ és $a \neq b$. Azt mondjuk, hogy a $b \in A$ elem **fedi** az $a \in A$ elemet, és ezt $a \prec b$-vel jelöljük, ha $a < b$ és nincs olyan $c \in A$, amelyre $a < c < b$ teljesül.

Megjegyzés.

A részbenrendezéseket véges halmazon úgy szemléltethetjük, hogy az elemek közt csak a fedési relációt „rajzoljuk be”, mégpedig úgy, hogy ha $a \prec b$, akkor a-t „lejjebb” rajzoljuk, mint b-t. Ekkor a $d \leqslant e$ relációt úgy olvashatjuk le a diagramról, hogy van egy felfelé vezető út d-ből e-be néhány közbülső $c_0, c_1, \ldots, c_n$ elemen keresztül, azaz $d = c_0 \prec c_1 \prec \cdots \prec c_n = e$. Ezt a diagramot a részbenrendezés **Hasse-diagramjának** nevezzük.



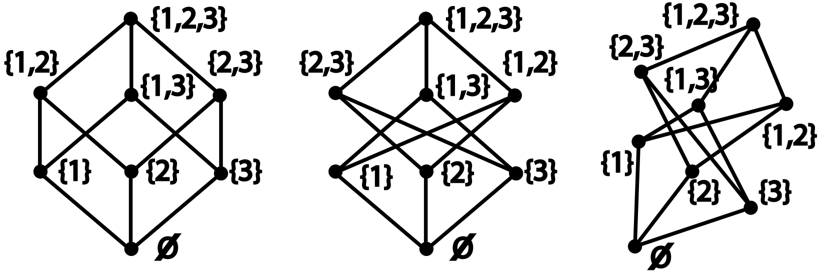
$(P(\{1,2,3\}); \subseteq)$



$(\{2,3,4,6,12\}; |)$

$(\{2,3,\ldots,7\}; \leq)$

Egyazon részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja többféleképpen is lerazolható:



Definíció.

Legyen $\leqslant$ részbenrendezés az A halmazon.

(a) Az $m \in A$ elem **maximális**, ha nincs olyan $a \in A$, hogy $m < a$.
(b) Az $m \in A$ elem **minimális**, ha nincs olyan $a \in A$, hogy $a < m$.
(c) Az $m \in A$ elem **legnagyobb elem**, ha minden $a \in A$ elemre $a \leqslant m$.
(d) Az $m \in A$ elem **legkisebb elem**, ha minden $a \in A$ elemre $m \leqslant a$.

- maximális elem = nincs nála nagyobb
- legnagyobb elem = minden másnál nagyobb

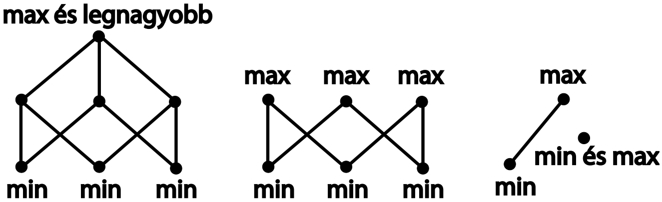
Megjegyzés.

Egy részbenrendezett halmaznak lehet több maximális és több minimális eleme is, és az is előfordulhat hogy nincs maximális vagy minimális elem.

Példa.

Legyen $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\}$, tekintsük az $(A; \mid)$ részbenrendezett halmazt. Ennek a részbenrendezett halmaznak nincsen maximális eleme, de végtelen sok minimális eleme van, melyek éppen a prímszámok.

Az oszthatóság reláció esetén megadható a természetes számoknak részhalmaza úgy, hogy a következő Hasse-diagramokat kapjuk:



Példa.

Az $(\mathbb{N}_0; \mid)$ részbenrendezett halmaz esetén az 1 minimális elem és legkisebb elem is, a 0 pedig maximális elem és legnagyobb elem is.

Tétel.

Véges halmazon minden részbenrendezésnek van maximális és minimális eleme.

Tétel.

Egy részbenrendezett halmazban legfeljebb egy legnagyobb és legfeljebb egy legkisebb eleme lehet.

Bizonyítás.

Ha m_1 is és m_2 is legnagyobb elem, akkor $m_2 \leqslant m_1$ (mert m_1 legnagyobb elem), $m_1 \leqslant m_2$ (mert m_2 legnagyobb elem). Az antiszimmetria miatt $m_1 = m_2$.

Tétel.

Részbenrendezett halmaz legkisebb eleme minimális, legnagyobb eleme maximális.

Definíció.

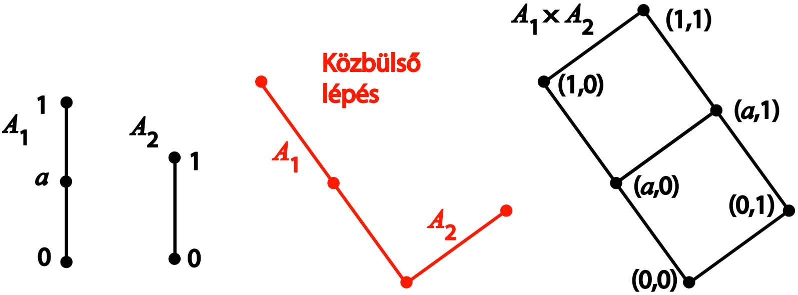
Legyen adott az $(A_1; \leqslant_1)$ és az $(A_2; \leqslant_2)$ részbenrendezett halmaz. **Direkt szorzatukat** úgy kapjuk, hogy Descartes-szorzatukon a komponensenkénti részbenrendezést definiáljuk. Azaz a direkt szorzatuk $(A_1 \times A_2; \leqslant)$, ahol $(a_1, a_2) \leqslant (b_1, b_2)$ azt jelenti, hogy $a_1 \leqslant_1 b_1$ és $a_2 \leqslant_2 b_2$. Megmutatható, hogy ez is részbenrendezett halmaz.

Definíció.

Ha $(A_1; \leqslant_1)$ és az $(A_2; \leqslant_2)$ rendezett halmaz (tehát nemcsak részbenrendezett), akkor **lexikografikus szorzatukon** az $(A_1 \times A_2; \leqslant)$ rendezett halmazt értjük, ahol a reláció a lexikografikus rendezést jelenti, azaz $(a_1, a_2) \leqslant (b_1, b_2)$ akkor és csak akkor, ha $a_1 <_1 b_1$, vagy ($a_1 = b_1$ és $a_2 \leq_2 b_2$). Megmutatható, hogy ily módon rendezett halmazt kapunk.

A lexikografikus szorzat onnan kapta a nevét, hogy a lexikonok, szótárak, névsorok is ezen az elven vannak rendezve.

A háromelemű és a kételemű rendezett halmaz direkt szorzatának Hasse-diagramja:



Metszet

Tétel.

Ha ϱ és σ tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus) relációk az A halmazon, akkor $\varrho \cap \sigma$ is tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus).

Következmény.

Ekvivalenciarelációk metszete ekvivalenciareláció, és részbenrendezések metszete részbenrendezés.

Tranzitív lezárt

Definíció.

Legyen $\rho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. A ρ reláció **tranzitív lezártja** alatt azt a legszűkebb ρ^+ tranzitív relációt értjük, amelyre $\rho \subseteq \rho^+$.

Tétel.

Legyen $\rho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. Ekkor

(a) $\rho^+ = \rho \cup (\rho\rho) \cup (\rho\rho\rho) \cup \cdots = \bigcup \{\rho^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $\rho^+ = \{(a, b) \in A \times A \mid (\exists n \in \mathbb{N}_0)(\exists c_1, \ldots, c_n \in A)((a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_n, b) \in \rho)\}$,

Példa.

Ha $A = \{1, 2, 3\}$ és $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$, akkor $\rho\rho = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2)\}$, és $\rho\rho\rho$ nem tartalmaz új elemeket. Tehát $\rho \cup (\rho\rho) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$ már tranzitív, ez lesz ρ^+, a tranzitív lezárt.

Reflexív és tranzitív lezárt

Definíció.

Legyen $\rho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. A ρ reláció **reflexív és tranzitív lezártja** alatt azt a legszűkebb ρ^* reflexív és tranzitív relációt értjük, amelyre $\rho \subseteq \rho^*$.

Tétel.

Legyen $\rho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció, ekkor a $\rho^* = \rho^+ \cup \{(a, a) \colon a \in A\}$ a ρ reflexív és tranzitív lezártja.

Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és $\rho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$. Az előző példában láttuk, hogy $\rho^+ = \rho \cup (\rho\rho) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$. Így a reflexív és tranzitív lezárt: $\rho^* = \rho^+ \cup \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

Relációk elektronikus teszt (2. fel.)

Az elektronikus tesztek a http://www.math.u-szeged.hu/∼mmaroti/tests/ oldalon érhetők el. A Relációk teszt az 5. hét végén indul.

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak illetve hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- A $\{\,(H_1, H_2) : H_1$ és H_2 hasonló$\,\}$ reláció a síkbeli háromszögek halmazán tranzitív.
- Legyen $\rho_{\mathcal{C}}$ az $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ alaphalmaz $\mathcal{C} = \big\{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e, f, g\}\big\}$ osztályozásához tartozó ekvivalenciareláció. Ekkor $(d, g) \in \rho_{\mathcal{C}}$.
- Tekintsük az $A = \{a, b, c, d\}$ alaphalmazon értelmezett $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$ ekvivalenciarelációhoz tartozó A/ρ osztályozást. Ekkor $\{c\} \in A/\rho$.

E-teszt.

Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyek az igazak illetve hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- A $\{\,(H_1, H_2) : H_1 \text{ és } H_2 \text{ hasonló}\,\}$ reláció a síkbeli háromszögek halmazán tranzitív. **Igaz**, ha H_1 és H_2 hasonló háromszögek (azaz szögeik megegyeznek), és H_2 és H_3 is hasonló, akkor H_1 és H_3 szögei is megegyeznek, tehát hasonlók, így a reláció tranzitív.
- Legyen $\rho_{\mathcal{C}}$ az $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ alaphalmaz $\mathcal{C} = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e, f, g\}\}$ osztályozásához tartozó ekvivalenciareláció. Ekkor $(d, g) \in \rho_{\mathcal{C}}$. **Igaz**, mivel d és g egy osztályban van, így a $\rho_{\mathcal{C}}$ definíciója szerint $(d, g) \in \rho_{\mathcal{C}}$.
- Tekintsük az $A = \{a, b, c, d\}$ alaphalmazon értelmezett $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$ ekvivalenciarelációhoz tartozó A/ρ osztályozást. Ekkor $\{c\} \in A/\rho$. **Hamis**, a definíció szerint c/ρ-ban az összes olyan elem szerepel, ami c-vel relációban áll, így $c/\rho = \{c, d\}$, tehát $\{c, d\} \in A/\rho$. Mivel A/ρ osztályozás, $\{c\} \notin A/\rho$.