# Relációk (1.)

Kátai-Urbán Kamilla

4. előadás

## Definíció.

Legyen $A$ és $B$ halmaz. Az $A \times B$ részhalmazait $A$-ból $B$-be történő **megfeleltetéseknek** nevezzük. Egy ilyen megfeleltetésnek $A$ az indulási halmaza, $B$ az érkezési halmaza. Ha $A = B$, akkor a megfeleltetést **relációnak** nevezzük.

## Megjegyzés.

A relációk lényegében ugyanazok, mint a kétváltozós predikátumok, hiszen az egyik a másikat meghatározza. (Tehát csak más felfogásban, más jelölésrendszerben beszélünk ugyanarról.)

## Példa.

- **Relációként** a „kisebb” az $\mathbb{N}$ halmazon nem más, mint az $\{(1,2),(1,3),\ldots,(2,3),(2,4),\ldots,(3,4),\ldots\}$ halmaz.
- **Predikátumként** a „kisebb” az $\mathbb{N}$ halmazon az $\mathbb{N}^2 \to \{i,h\}$ leképezés, ahol pl. $(1,2) \mapsto i$, $(1,3) \mapsto i$, de pl. $(4,2) \mapsto h$, stb.

Pontosan azokból az elempárokból áll a reláció, ahol a predikátum értéke $i$.

# Relációk szemléltetése

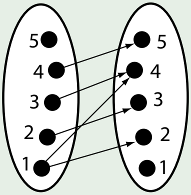
Egy $\rho \subseteq A \times A$ relációt szemléltethetünk

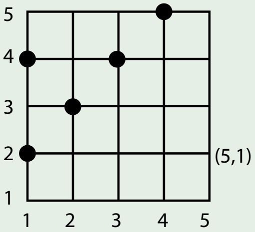
- **nyíldiagrammal**: az $(a, b) \in \rho$ párt egy $a$-ból $b$-be irányított nyíllal ábrázoljuk.
- **koordinátarendszerben**: az $A \times A$ Descartes-szorzatot ábrázoljuk koordinátarendszerben, és valamilyen módon megjelöljük a $\rho$ részhalmazba tartozó elemeket.
- **mátrixszal**: ha $|A| = n$, akkor $A$ elemeit megszámozzuk, és aszerint írunk 1-et illetve 0-t egy mátrix (azaz számtáblázat) $i$-edik sorának $j$-edik helyére, hogy $(i, j)$ benne van-e vagy nincs benne a relációban. (Informatikában gyakran használják ezt a módszert, a relációkat a bitmátrixukkal adják meg.)

A példában szereplő relációt szemléltetjük az előbb leírt 3 módon.

## Példa.

Legyen A=$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $\rho = \{(a, b) \in A \times A : a + 1 \text{ osztója } b\text{-nek}\}$.




$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Megjegyzés.

- A nyíldiagramm helyett gráffal is szemléltethetjük a relációkat, ha az $A$ halmazon belül húzzuk be az éleket.
- Ha $\rho \subseteq A \times A$ egy reláció, akkor $(a, b) \in \rho$ helyett néha az $a\rho b$ jelölést alkalmazzuk. Általában ez jellemző a jól ismert relációkra: pl. azt írjuk, hogy $a \leq b$ ahelyett, hogy $(a, b) \in \leq$.

Mivel bármely $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk egyben halmazok is, így relációkon is elvégezhetők a halmazműveletek.

## Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és
$\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\} \subseteq A^2$,
$\beta = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (5, 5)\} \subseteq A^2$.

- $\alpha \cap \beta = \{(1, 3), (3, 4)\}$;
- $\alpha \cup \beta = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 5), (5, 6)\}$;
- $\alpha \setminus \beta = \{(1, 1), (2, 3), (5, 6)\}$;
- $\alpha \triangle \beta = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (5, 5), (5, 6)\}$.

## Példa.

Jelölje $E$ az emberek halmazát, legyenek $\gamma = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\}$ és $\delta = \{(x, y) : x \text{ apja } y\}$ relációk az $E$ halmazon.

$$\gamma \cup \delta = \{(x, y) : x \text{ anyja vagy apja } y\} = \{(x, y) : x \text{ szülője } y\} \subseteq E^2.$$

# Reláció inverze

## Definíció.

Tetszőleges $\rho \subseteq A \times A$ relációra definiáljuk annak **inverzét**:

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in A \times A \mid (y, x) \in \rho\}.$$

Vegyük észre, hogy $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

## Példa.

Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és $\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\}$ reláció az $A$ halmazon.

$$\alpha^{-1} = \{(1, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 3), (6, 5)\}.$$

## Példa.

Jelölje $E$ az emberek halmazát, és $\gamma = \{(x, y) \colon x \text{ anyja } y\}$.

$$\gamma^{-1} = \{(x, y) \colon y \text{ anyja } x\}.$$

# Relációk szorzata

**Definíció.**

A $\rho, \sigma \subseteq A \times A$ relációk **szorzata**:

$$\rho\sigma = \{(x, y) \in A \times A \mid (\exists z \in A)((x, z) \in \rho \ \wedge \ (z, y) \in \sigma)\}.$$

**Példa.**

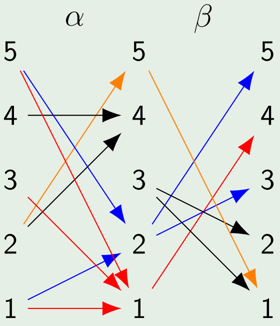
Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, és
$\alpha = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4), (5, 6)\} \subseteq A^2$,
$\beta = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (5, 5)\} \subseteq A^2$.

$$\alpha\beta = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4)\},$$

$$\beta\alpha = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (5, 6)\}.$$

# Példa.

Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}$,
$\alpha = \{(1,1),(1,2),(2,4),(2,5),(3,1),(4,4),(5,1),(5,2)\} \subseteq A^2$
$\beta = \{(1,4),(2,3),(2,5),(3,1),(3,2),(5,1)\} \subseteq A^2$.




Ekkor $\alpha\beta = \{(1,4),(1,3),(1,5),(2,1),(3,4),(5,4),(5,3),(5,5)\}$.
Vizuálisan az a kérdés, hogy mely bal oldali elemből tudok eljutni egy középső elemen keresztül valamelyik jobb oldaliba.

# Szorzás és inverz

## Példa.

Jelölje $E$ az emberek halmazát és

$$\sigma = \{(x,y) \in E \times E \mid x \text{ szülője } y\text{-nak}\}\,.$$

Meghatározzuk a $\sigma\sigma$ és a $\sigma^{-1}\sigma$ relációkat.

- $\sigma\sigma = \{(x,y) \in E \times E \mid (\exists z \in E)((x,z) \in \sigma \ \wedge \ (z,y) \in \sigma)\} =$
  $= \{(x,y) \in E \times E \mid (\exists z \in E)(x \text{ szülője } z\text{-nek} \wedge \ z \text{ szülője } y\text{-nak})\}\,.$
  $$\sigma\sigma = \{(x,y) \in E \times E \mid x \text{ nagyszülője } y\text{-nak}\}\,.$$

- $\sigma^{-1}\sigma = \{(x,y) \in E \times E \mid (\exists z \in E)((x,z) \in \sigma^{-1} \ \wedge \ (z,y) \in \sigma)\} =$
  $= \{(x,y) \in E \times E \mid (\exists z \in E)((z,x) \in \sigma \ \wedge \ (z,y) \in \sigma)\} =$
  $= \{(x,y) \in E \times E \mid (\exists z \in E)(z \text{ szülője } x\text{-nek} \wedge \ z \text{ szülője } y\text{-nak})\} =$

$\sigma^{-1}\sigma = \{(x,y) \in E \times E \mid x \text{ testvére vagy féltestvére } y\text{-nak, vagy } x = y\}\,.$

# Műveleti tulajdonságok

**Tétel.**

Tetszőleges $\alpha, \beta, \gamma \subseteq A \times A$ relációk esetén teljesülnek a következők:

- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (asszociativitás),
- $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$.

**Megjegyzés.**

Ahogy egy korábbi példában is láttuk, a relációk szorzása NEM KOMMUTATÍV, azaz nem cserélhető fel általában a tényezők sorrendje.

# Relációtulajdonságok

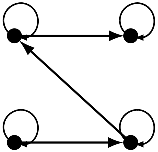
# Relációtulajdonságok

**Definíció.**

Egy $\alpha \subseteq A \times A$ reláció esetén azt mondjuk, hogy $\alpha$

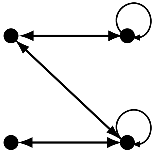
- **reflexív**, ha bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$.
- **szimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$.
- **antiszimmetrikus**, ha bármely $x, y \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$ és $(y, x) \in \alpha$, akkor $x = y$.
- **tranzitív**, ha bármely $x, y, z \in A$-ra ha $(x, y) \in \alpha$ és $(y, z) \in \alpha$, akkor $(x, z) \in \alpha$.
- **dichotom**, ha bármely $x, y \in A$-ra $(x, y) \in \alpha$ vagy $(y, x) \in \alpha$.

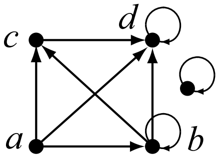
# Relációtulajdonságok gráffal (1.)



reflexív = minden pontban hurokél

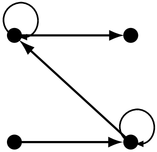
szimmetrikus = minden él kétirányú
(a kétirányú él két - eltérő irányítású
élet jelent)



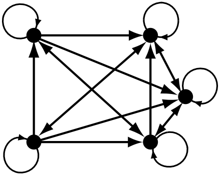



tranzitív = bármely két pontra, ha az egyikből irányított élek mentén eljuthatunk a másikba, akkor egyetlen irányított él mentén is eljuthatunk. Pl. az *a* - *b* - *c* - *d* útvonal miatt kell hogy legyen él *a* -ból *d* -be.

# Relációtulajdonságok gráffal (2.)



antiszimmetrikus = két különböző pont között legfeljebb csak az egyik irányban megy él.



dichotom = bármely két pont között - legalább az egyik irányban - megy él.

Nyilvánvaló, hogy minden dichotom reláció egyúttal reflexív is (hiszen a „bármely két pont” egybe is eshet).

# Ekvivalenciareláció, részbenrendezés, rendezés

**Definíció.**

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **ekvivalenciareláció**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

**Definíció.**

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

**Definíció.**

Egy reláció esetén azt mondjuk, hogy **rendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és dichotom.

## Példa.

Megvizsgáljuk, hogy a tanultak közül mely relációtulajdonsággal rendelkeznek az alábbi relációk:

- $\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
- $\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \leqslant b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\delta = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| \leqslant |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\mu = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| = |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
- $\rho = \{(X, Y) \in P(A) : X \subseteq Y\} \subseteq P(A) \times P(A)$, ahol $A$ halmaz és $|A| \geqslant 2$.

A tulajdonságok vizsgálata után eldöntjük, hogy ekvivalenciareláció, részbenrendezés vagy rendezés-e a reláció.

# $\alpha$ tulajdonságai

## Példa (folyt.)

$\alpha = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a + b = 2\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- Reflexív? Pl. $3 + 3 \neq 2$, így $(3, 3) \notin \alpha$, tehát NEM reflexív.
- Szimmetrikus? IGEN, hiszen ha $a + b = 2$, akkor $b + a = 2$ (mert az összeadás kommutatív).
- Antiszimmetrikus? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + a = 2$, akkor szükségképpen $a = b$? NEM, pl. $a = -1$, $b = 3$ ellenpélda.
- Tranzitív? Igaz-e, hogy ha $a + b = 2$ és $b + c = 2$, akkor $a + c = 2$? NEM, hiszen pl. $a = c = 0$, $b = 2$ esetén sem teljesül.
- Dichotom? NEM dichotom, hiszen pl. $(3, 4) \notin \alpha$ és $(4, 3) \notin \alpha$.

Tehát NEM ekvivalenciareláció, NEM részbenrendezés és NEM rendezés.

# $\beta$ tulajdonságai

## Példa (folyt.)

$\beta = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \mid b\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ez az ún. **oszthatósági reláció** $\mathbb{N}$-en.

- Reflexív, mivel (minden szám osztható önmagával).
- NEM szimmetrikus, hiszen pl. $2 \mid 6$, de a 6 nem osztója a 2-nek.
- Antiszimmetrikus, hiszen ha két pozitív egész szám egymásnak kölcsönösen osztója, akkor egyenlőek.
- Tranzitív is, ha $a$ osztója $b$-nek és $b$ osztója $c$-nek, akkor $a$ osztója $c$-nek: csakugyan, ha alkalmas $x, y$ pozitív egész számokra $b = xa$ és $c = yb$, akkor $c = yxa$, azaz $a \mid c$.
- NEM dichotom, hiszen pl. a 3 és az 5 számokat tekintve egyik sem osztója a másiknak.

Tehát $\beta$ részbenrendezés, de NEM rendezés és NEM ekvivalencia.

## Példa (folyt.)

- $\gamma = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a \leqslant b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív, dichotom, tehát rendezés és részbenrendezés is. De nem szimmetrikus, ezért nem ekvivalencia.
- $\delta = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| \leqslant |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, tranzitív, dichotom, de nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus (mert pl. $(1, -1), (-1, 1) \in \delta$, de $1 \neq -1$). Ezért nem ekvivalencia, nem részbenrendezés, és akkor nem is rendezés.
- $\mu = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| = |b|\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: reflexív, szimmetrikus, tranzitív, tehát ekvivalencia. Nem dichotom. Nem antiszimmetrikus (mert pl. $(1, -1), (-1, 1) \in \mu$, de $1 \neq -1$). Ezért nem részbenrendezés, és akkor persze nem rendezés.
- $\rho = \{(X, Y) \in P(A) : X \subseteq Y\} \subseteq P(A) \times P(A)$, ahol $A$ halmaz és $|A| \geqslant 2$: reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, tehát részbenrendezés. Mivel $|A| \geqslant 2$, nem dichotom. Ezért nem rendezés. Nem szimmetrikus, ezért nem ekvivalencia.

# Mi a kapcsolat a relációtulajdonságok között?

Ha nem reflexív a reláció, akkor nem is dichotom.

## Van-e olyan reláció, ami szimmetrikus és antiszimmetrikus.

Ha egy $\alpha \subseteq A^2$ reláció szimmetrikus, és vannak olyan $a, b \in A$ KÜLÖNBÖZŐ ($a \neq b$) elemek, amelyre $(a, b) \in \alpha$, akkor a szimmetria miatt $(b, a) \in \alpha$. Tehát ekkor teljesül $a \neq b$ elemekre, hogy $(a, b), (b, a) \in \alpha$, így $\alpha$ nem antiszimmetrikus.
Ebből az látszana, hogy nem lehet egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, de nem ez a helyzet, ugyanis abból indultunk ki, hogy „vannak olyan $a, b \in A$ KÜLÖNBÖZŐ ($a \neq b$) elemek, amelyre $(a, b) \in \alpha$”, ha nincsenek ilyen elemek, akkor teljesülhet mindkét tulajdonság.
Milyenek lehetnek azok a relációk, amelyek szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is? Gráfokkal megfogalmazva legfeljebb csak hurokéleket tartalmazhatnak. Ha minden pontban van hurokél, akkor éppen a jól ismert „egyenlőség” relációt kapjuk. De az sem szükséges, hogy legyen benne él, tehát pl. az „üres reláció” is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

# Szimmetrikus relációk jellemzése

**Tétel.**

Tetszőleges $\alpha \subseteq A^2$ reláció szimmetrikus $\Longleftrightarrow$ $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$.

**Bizonyítás.**

„$\Rightarrow$" Tegyük fel, hogy $\alpha$ szimmetrikus. A szimmetriát felhasználva $\alpha^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \alpha\} = \{(x, y) : (x, y) \in \alpha\} = \alpha$. Tehát $\alpha = \alpha^{-1}$, és így annál inkább teljesül az $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$.
„$\Leftarrow$" Most tegyük fel, hogy $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$. Ha $(x, y) \in \alpha$, akkor a feltevés szerint $(x, y) \in \alpha^{-1}$ is teljesül. De az inverz definíciója miatt ez azt jelenti, hogy $(y, x) \in \alpha$. Tehát ha $(x, y) \in \alpha$, akkor $(y, x) \in \alpha$, azaz $\alpha$ szimmetrikus.

# Tranzitív relációk jellemzése

## Tétel.

Tetszőleges $\alpha \subseteq A^2$ reláció tranzitív $\Longleftrightarrow$ $\alpha\alpha \subseteq \alpha$.

## Bizonyítás.

„$\Rightarrow$" Tegyük fel, hogy $\alpha \subseteq A^2$ tranzitív. Ha $(x, y) \in \alpha\alpha$, akkor a szorzás definíciója miatt van olyan $z \in A$, hogy $(x, z), (z, y) \in \alpha$. De $\alpha$ tranzitivitása miatt innen $(x, y) \in \alpha$. Tehát $\alpha\alpha \subseteq \alpha$, hiszen a baloldal tetszőleges $(x, y)$ eleme a jobboldalnak is eleme.
„$\Leftarrow$" Most azt tegyük fel, hogy $\alpha\alpha \subseteq \alpha$. A tranzitivitás bizonyításához legyen $(x, y) \in \alpha$ és $(y, z) \in \alpha$. Mivel most $x$ és $z$ „között" létezik $y$, kapjuk, hogy $(x, z) \in \alpha\alpha$. A feltételben szereplő tartalmazás szerint ebből $(x, z) \in \alpha$. Ezzel $\alpha$ tranzitivitását igazoltuk.

# Reflexív/szimmetrikus relációk szorzata

## Tétel.

Tetszőleges $\alpha, \beta \subseteq A^2$ reflexív relációk esetén az $\alpha\beta$ szorzat is reflexív.

## Bizonyítás.

Legyen $\alpha \subseteq A^2$ és $\beta \subseteq A^2$ reflexív. Ekkor bármely $x \in A$-ra $(x, x) \in \alpha$ és $(x, x) \in \beta$, ezért $(x, x) \in \alpha\beta$. Tehát $\alpha\beta$ is reflexív.

## Megjegyzés.

Szimmetrikus relációk szorzata nem mindig szimmetrikus.
Például legyen $A = \{1, 2, 3\}$, és $\alpha = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $\beta = \{(2, 3), (3, 2)\}$ relációk $A$-n. Mindkét reláció szimmetrikus, és $(1, 3) \in \alpha\beta$, de $(3, 1) \notin \alpha\beta$.

# Relációk elektronikus teszt (1. fel.)

Az elektronikus tesztek a http://www.math.u-szeged.hu/∼mmaroti/tests/ oldalon érhetők el. Az első két elektronikus teszt már kitölthető. A Relációk teszt az 5. hét végén indul.

## E-teszt.

Döntse el, hogy az

$$\begin{aligned}\alpha &= \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1),(4,4)\},\\ \beta &= \{(1,4),(4,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3)\}, \text{ és}\\ \gamma &= \{(1,1),(1,4),(2,1),(3,3),(4,3)\}\end{aligned}$$

relációk esetén az alábbi állítások közül melyek az igazak, és melyek hamisak (1 pont jár, ha mind a három válasz helyes).

- $(3,2) \in \alpha\gamma$. **Hamis**, $(3,1) \in \alpha$, de $(1,2) \notin \gamma$.
- $(1,4) \notin \beta^{-1}\gamma$. **Igaz**, $(1,3) \in \beta^{-1}$, de $(3,4) \notin \gamma$.
- $(4,3) \in \beta^{-1}\alpha^{-1}$. **Igaz**, $(4,1) \in \beta^{-1}$ és $(1,3) \in \alpha^{-1}$.