

5. feladatsor – Leképezések, számosságok

5.1. Feladat. Határozza meg az alábbi megfeleltetések értelmezési tartományát és értékkészletét. Melyik leképezés?

- (a) $\alpha = \{(x, y) : y = |x|\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- (b) $\beta = \{(x, y) : x = y^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- (c) $\gamma = \{(x, y) : x = 2^y\} \subseteq \mathbb{R}^2$

5.2. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3x + 1$
- (b) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 2^x - 1, \quad \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3^{x-1}$
- (c) $\alpha: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2}, \quad \beta: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^2, x \mapsto (x, x-1)$

5.3. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi leképezések injektívek-e, szürjektívek-e, illetve bijektívek-e. (A feladatokban $\mathbb{H}$ jelöli a síkbeli nemelfajuló háromszögek halmazát és $\mathbb{E}$ jelöli az emberek halmazát.)

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2$
- (b) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, x\beta = x^2$
- (c) $\gamma = \{(x, y) : x \text{ anyja } y\} \subseteq \mathbb{E} \times \mathbb{E}$
- (d) $\delta = \{(x, y) : \text{az } x \text{ háromszög kerülete } y \text{ méter}\} \subseteq \mathbb{H} \times \mathbb{R}$
- (e) $\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x\varepsilon = \frac{4}{x}$
- (f) $\zeta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n\zeta = |n - 3| + 1$
- (g) $\eta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n \text{ pozitív osztóinak száma}$
- (h) $\theta: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x + y$
- (i) $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x - 1, 1)$
- (j) $\kappa: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1, \\ x - 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

5.4. Feladat. Adjunk minél egyszerűbb példát olyan leképezésre, amely

- (a) nem szürjektív,
- (b) szürjektív, de nem bijektív,
- (c) injektív, de nem bijektív,
- (d) bijektív.

Igazoljuk is a fenti tulajdonságokat.

5.5. Feladat. Ellenőrizzük, hogy az alábbi leképezések valóban bijektívek, és adjuk meg az inverzüket.

- (a) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 3x - 1$
- (b) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta = (x + 2)^2 - 4$

5.6. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között.

(a) $(1, 6)$ és $(4, 7)$

(b) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^+$

(c) $(0, 1)$ és $\mathbb{R}$

5.7. Feladat. Döntsük el, hogy megadható-e $A \rightarrow B$ bijektív leképezés, azaz megegyezik-e az A és a B halmaz számossága.

(a) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$

(f) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, B = \mathbb{R}$

(b) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Q}$

(g) $A = \mathbb{N}^3, B = \mathbb{Z}$

(c) $A = \mathbb{Z}, B = \mathbb{R}$

(h) $A = \mathbb{Q}^4, B = \mathbb{N}^2$

(d) $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, B = \mathbb{N}$

(i) $A = \mathbb{R}^2, B = \mathbb{Z}^8$

(e) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, B = \mathbb{Z}$

5.8. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

(a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?

(b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?

(c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?