

2. feladatsor – Predikátumkalkulus elemei

2.1. Feladat megoldása.

- (a) A 7 páros szám.
- (b) A 4 négyzetszám, és 12 nemnegatív.
- (c) Minden szám 4-szerese osztható 2-vel.
- (d) A 6-nak létezik páros osztója.
- (e) Minden 4-gyel osztható szám páros.
- (f) Minden négyzetszámnak van páros többszöröse.
- (g) Létezik olyan páros szám, melynek nincs páros negatív osztója.

2.2. Feladat megoldása.

Részkifejezések: $x, a, y, f(x, a), f(y, x)$.

Részformulák: $P(f(x, a), x), (\forall x)P(f(x, a), x), Q(x), P(f(y, x), y), P(f(y, x), y) \wedge Q(x), (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x)), (\forall x)P(f(x, a), x) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x), y) \wedge Q(x))$.

Pirossal jelölve a kötött előfordulás, zölddel a szabad előfordulás:

$$(\forall x) P(f(\textcolor{red}{x}, a), \textcolor{red}{x}) \rightarrow (\exists y) (P(f(\textcolor{red}{y}, \textcolor{green}{x}), \textcolor{red}{y}) \wedge Q(\textcolor{green}{x})).$$

Tehát y kötött változó, mert minden előfordulása kötött; x vegyes változó, mert van szabad és kötött előfordulása is.

2.3. Feladat megoldása.

- (a) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg V(x))$
- (b) $(\forall x)(H(x) \rightarrow V(x))$
- (c) $(\exists x)(H(x) \wedge \neg(\exists y)B(y, x))$
- (d) $(\exists x)(H(x) \wedge (\forall y)(T(y, x) \rightarrow C(y, x)))$
- (e) $(\exists x)(F(x) \wedge \neg(\exists y)(\neg F(y) \wedge T(y, x)))$
- (f) $(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg F(x)) \wedge (\exists x)(\neg F(x) \wedge \neg A(x))$
- (g) $(\forall x)(B(x, p) \rightarrow H(x))$
- (h) $(\exists x)(H(x) \wedge (\neg S(a(x))))$
- (i) $S(a(p))$

2.4. Feladat megoldása.

Predikátumok: $O(x, y)$: „ x osztja y -t”, $N(x)$: „ x nullára végződik”, $P(x)$: „ x pozitív”, $K(x, y)$: „ x kisebb y -nél”.

Függvények: $f(x)$: „ x négyzete”.

- (a) $(\forall x)(O(1, x) \wedge O(x, x))$
 $\neg[(\forall x)(O(1, x) \wedge O(x, x))] \equiv (\exists x)(\neg O(1, x) \vee \neg O(x, x))$
- (b) $(\forall x)(\exists y)K(y, x)$
 $\neg[(\forall x)(\exists y)K(y, x)] \equiv (\exists x)(\forall y)\neg K(y, x)$
- (c) $(\forall x)(O(10, x) \rightarrow N(x))$
 $\neg[(\forall x)(O(10, x) \rightarrow N(x))] \equiv (\exists x)(O(10, x) \wedge \neg N(x))$
- (d) $(\exists x)(K(x, 0) \wedge P(f(x)))$
 $\neg[(\exists x)(K(x, 0) \wedge P(f(x)))] \equiv (\forall x)(\neg K(x, 0) \vee \neg P(f(x)))$

$$(e) (\forall x)(P(x) \vee K(x, 0)) \\ \neg[(\forall x)(P(x) \vee K(x, 0))] \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg K(x, 0))$$

2.5. Feladat megoldása.

Individuumkonstansok: m : „Mézga Géza”.

Predikátumok: $I(x)$: „ x informatikus”; $E(x)$: „ x éhes”; $S(x)$: „ x szakács”; $K(x, y)$: „ x kedveli y -t”; $F(x, y)$: „ x főz y -nak”; $Sz(x)$: „ x szerencsés”; $G(x, y)$: „ x gyermeke y -nak”.

Függvények: $g(x)$: „ x gyereke”.

- (a) $(\forall x)(I(x) \rightarrow E(x))$
Tagadása: $(\exists x)(I(x) \wedge \neg E(x))$, *Van olyan informatikus, aki nem éhes.*
- (b) $(\forall x)((E(x) \wedge S(x)) \rightarrow F(x, x))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge S(x) \wedge \neg F(x, x))$, *Van olyan éhes szakács, aki nem főz magának.*
- (c) $(\forall x)((E(x) \wedge I(x)) \rightarrow (\forall y)(S(y) \rightarrow K(x, y)))$,
Tagadása: $(\exists x)(E(x) \wedge I(x) \wedge (\exists y)(S(y) \wedge \neg K(x, y)))$, *Van olyan éhes informatikus, aki nem kedvel minden szakácsot.*
- (d) $(\exists x)(S(x) \wedge (\forall y)(F(x, y) \rightarrow I(y)))$,
Tagadása: $(\forall x)(S(x) \rightarrow (\exists y)(F(x, y) \wedge \neg I(y)))$, *A szakácsok nem csak informatikusoknak főznek.*
- (e) $(\forall x)(\forall y)((I(x) \wedge F(y, x) \wedge S(y)) \rightarrow K(x, y))$,
Tagadása: $(\exists x)(\exists y)(I(x) \wedge F(y, x) \wedge S(y) \wedge \neg K(x, y))$, *Van olyan informatikus, aki nem kedvel néhány neki főző szakácsot.*
- (f) $\neg Sz(m) \wedge (\forall x)(G(x, m) \rightarrow Sz(x))$,
Tagadása: $Sz(m) \vee (\exists x)(G(x, m) \wedge \neg Sz(x))$, *Mézga Géza szerencsés, vagy van olyan gyermeke, aki szerencsétlen.*
- (g) $(S(m) \wedge (\forall x) \neg E(x)) \rightarrow (\forall x) Sz(x)$,
Tagadása: $S(m) \wedge (\forall x) \neg E(x) \wedge (\exists x) \neg Sz(x)$, *Mézga Géza a szakács, senki sem éhes, és van aki nem szerencsés.*

2.6. Feladat megoldása.

- (a) Igen.
(b) Igen.

2.7. Feladat megoldása.

- (a) Igen.
(b) Nem.
(c) Igen.
(d) Igen.