Elméleti összefoglaló a

Diszkrét matematika I. gyakorlathoz

Készítette: Bogya Norbert
Átnézte: Dékány Tamás

2018. augusztus 23.

Megjegyzéseket, hibákat, elgépeléseket nyugodtan lehet jelezni itt:
nbogya@math.u-szeged.hu

Tartalomjegyzék

Halmazok

Halmazelméleti alapfogalmak, hatványhalmaz,
halmazműveletek, halmazműveletek azonosságai.

1. Alapfogalmak

A *halmaz* és az *eleme* fogalmakat alapfogalmaknak tekintjük, nem definiáljuk őket. Jelölés: $x \in H$, azaz x eleme a H halmaznak. Itt x egy tetszőleges valami, mivel a H elemei is tetszőleges dolgok lehetnek. Egy halmaz elemeit megadhatjuk felsorolással, képlettel, körülírással; a lényeg, hogy egyértelműen kiderüljön, hogy mik tartoznak a halmazba, és mik nem. Egy halmaz *véges*, ha véges sok eleme van. Ezt a véges számot a halmaz *elemszám*ának nevezzük. Egy H halmaz elemszámát $|H|$-val jelöljük.

1. Definíció. Az **üres halmaz** olyan halmaz, melynek nincs eleme. Jele: $\emptyset$. Másképpen fogalmazva: minden x-re teljesül az, hogy $x \notin \emptyset$.

2. *Megjegyzés.* Csak egyetlen üres halmaz van, viszont sok különböző módon felírható. Például

$$\emptyset = \{\text{10-nél nagyobb páros prímszámok}\} = \{\text{4 fejű piros kutyák}\}.$$

3. Definíció. Két **halmaz egyenlő**, ha elemeik megegyeznek. Jelölés: $A = B$.

4. *Megjegyzés.* Az előző definíció értelmében egy halmazban minden elemet egyszeres multiplicitással számolunk. Például $\{0, 1, 2\} = \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2\}$, mert a két oldal elemei ugyanazok. Ugyanígy értelmetlen a halmazban az elemek sorrendjét megkülönböztetni.

5. Példa. [1] $\{2, 4, 6, 8\} = \{8, 4, 2, 6\} = \{x \in \mathbb{N} : x < 10 \text{ és } \exists y \in \mathbb{N}, \text{ hogy } x = 2y\} =$ „egyjegyű páros számok halmaza”

6. Példa. $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
A bal oldali halmaz az üres halmaz, neki nincs eleme, elemszáma nulla. A jobb oldali egy olyan halmaz, mely 1 darab elemet tartalmaz, mégpedig az üres halmazt. Ennek az elemszáma 1. Ez a kettő olyan, mint egy üres könyv, illetve az üres könyvet tartalmazó polc. A könyv üres, de a polc nem. A két halmaz természetesen nem egyenlő.

[1] $\forall x$ jelentése „bármely x”, „minden x”; $\exists x$ jelentése „létezik x”, „van olyan x”

2. Részhalmaz, hatványhalmaz

7. Definíció. Az A halmaz a B halmaznak **részhalmaza**, ha minden A-beli elem egyben B-nek is eleme. Jelölés: $A \subseteq B$.

8. Példa. $\{1,5,8\} \subseteq \{1,4,5,6,8\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$.

9. *Megjegyzés.* Minden H halmaznak van két triviális részhalmaza:

- $H \subseteq H$, azaz minden halmaz részhalmaza saját magának, illetve
- $\emptyset \subseteq H$, azaz az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

Tulajdonképpen ez a kettő az üreshalmaz esetén egybeesik.

10. Definíció. Az A halmaz a B halmaznak **valódi részhalmaza**, ha részhalmaza, de nem egyenlő vele. Jelölése: $A \subset B$.

11. Példa. A 8. Példában szereplő részhalmazjelek tulajdonképpen valódi részhalmazt jelentenek.

A részhalmaz fogalmára érvényesek olyan nyilvánvaló tulajdonságok, mint valós számok körében a „kisebb vagy egyenlő” relációra.

12. Tétel. *Legyen A, B és C tetszőleges halmaz. Ekkor*

- *ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$;*
- *ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$, akkor $A = B$.*

13. *Megjegyzés.* Az előző tételben szereplő tulajdonságoknak neve is van, ami a későbbiekben még sokszor elő fog fordulni. Az első tulajdonság azt fejezi ki, hogy a részhalmaz reláció *tranzitív*, a második pedig azt, hogy *antiszimmetrikus*. Az pedig, hogy minden halmaz részhalmaza saját magának azt mutatja, hogy a részhalmaz reláció *reflexív*.

14. Definíció. Egy H halmaz **hatványhalmaz**ának nevezzük azt a halmazt, mely a H halmaz összes részhalmazát tartalmazza elemként. Tehát ez egy olyan halmaz, melynek elemei halmazok. Jelölése: $\mathcal{P}(H)$.

15. Példa. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Általában egy rögzített, jól definiált halmaz elemeivel foglalkozunk, ugyanis nem túl sok értelme van a $H = \{0, 1, 2, 3, \text{Shakespeare összes művei}, p, q, r\}$ halmaznak. Ez is egy korrekten definiált halmaz, de gyakorlati haszna nem túl sok van. Ezért meg szoktunk állapítani egy alaphalmazt, és csak ezen alaphalmaz elemeit vizsgáljuk, az ezen kívüli elemekkel nem foglalkozunk. Például a prímszámok halmazának vizsgálatakor az alaphalmazt tekinthetjük például az egész számok halmazának, mert úgy sem akarjuk azt vizsgálni, hogy egy ceruza eleme-e a prímszámok halmazának. Mivel a ceruza nincs az alaphalmazban, így nem is merül fel ilyen kérdés.

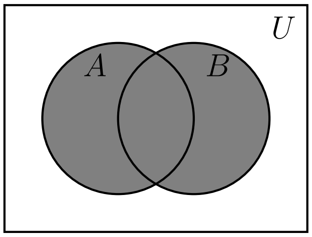
Ha már azonos típusú elemekből álló halmazokat vizsgálunk, akkor bevezethetünk a halmazaink között műveleteket.

3. Halmazműveletek

16. Definíció. Legyen A és B két tetszőleges halmaz, U legyen a rögzített alaphalmaz, $A, B \subseteq U$. (A formális definíciók mellett a műveleteket Venn-diagramokon is szemléltetjük.)

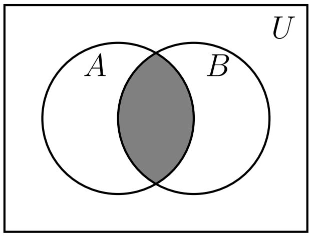
(a) Az A és B halmazok **unió**jának nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van valamelyik halmazban.
Jelölés: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \text{ VAGY } x \in B\}$$



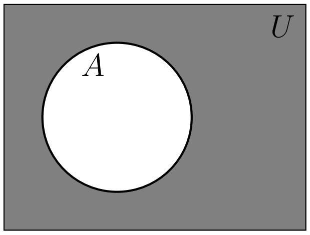
(b) Az A és B halmazok **metszet**ének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van mindkét halmazban.
Jelölés: $A \cap B$.

$$A \cap B = \big\{x : \ x \in A \text{ ÉS } x \in B\big\}$$



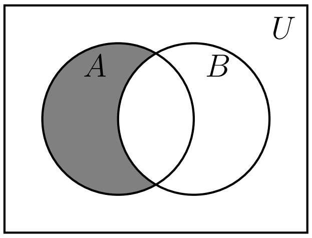
(c) Az A halmaz **komplementer**ének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van U-ban (az alaphalmazban), de nincs benne A-ben.
Jelölés: $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \big\{x : \ x \in U \text{ ÉS } x \notin A\big\}$$



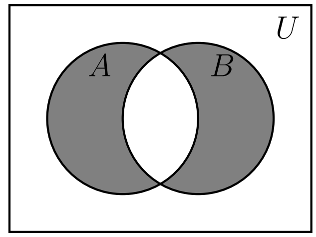
(d) Az A és B halmazok **különbség**ének nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme benne van A-ban, de nincs benne B-ben.
Jelölés: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \big\{x : \ x \in A \text{ ÉS } x \notin B\big\} = A \cap \overline{B}$$



(e) Az A és B halmazok **szimmetrikus differenciá**jának nevezzük azt a halmazt, melynek minden eleme az A és a B halmazok közül pontosan az egyikben van benne. Jelölés: $A \triangle B$.

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$



4. Halmazműveleti azonosságok

Ebben a részben a halmazműveletek néhány fontosabb tulajdonságát vizsgáljuk meg. Tételként fogunk rájuk hivatkozni, de az állítások legnagyobb része az előbbi definíciók alapján könnyen és gyorsan igazolható.

17. Tétel. *Tetszőleges A, B, C halmazokra*

$$\begin{array}{lcr} A \cap A = A, & A \cup A = A, & \textit{(idempotencia)} \\ A \cap B = B \cap A, & A \cup B = B \cup A, & \textit{(kommutativitás)} \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,, & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,, & \textit{(asszociativitás)} \\ (A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \textit{(abszorptivitás)} \\ (A \cup B) \cap C = & (A \cap B) \cup C = & \textit{(disztributivitás)} \\ (A \cap C) \cup (B \cap C)\,, & (A \cup C) \cap (B \cup C)\,. & \end{array}$$

18. Tétel. *Tetszőleges $A, B\, (\subseteq U)$ halmazokra*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \textit{(de Morgan azonosságok)}$$

$$\overline{\overline{A}} = A,$$

$$\begin{array}{cc} A \cap \overline{A} = \emptyset, & A \cup \overline{A} = U, \\ A \cap U = A, & A \cup U = U, \\ A \cap \emptyset = \emptyset, & A \cup \emptyset = A. \end{array}$$

A következő tétel már szerepelt a halmazműveletek definíciójánál, azonban fontosságuk miatt tételként is leírjuk újra. A halmazműveletek definícióinál az igazi definíciók a szöveges definíciók, azokból lehet levezetni a következő egyenlőségeket a nyelvtani kötőszavakat megfelelően variálva.

19. Tétel. *Tetszőleges $A, B\, (\subseteq U)$ halmazokra*

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

és

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

Az előző két tétel segíthet abban, hogy a különböző halmazműveleteket átírjuk más halmazműveleti jelek segítségével.

20. *Megjegyzés.* A fenti halmazműveletek mindegyike kifejezhető unió, metszet, és komplementer műveletek segítségével. (Sőt, a metszet és az unió közül elég az egyik a de Morgan szabály miatt.)

21. Példa.

$$\begin{aligned}
A \setminus (B \triangle \overline{C}) &= A \cap \overline{(B \triangle \overline{C})} && (1)\\
&= A \cap \overline{((B \cup \overline{C}) \setminus (B \cap \overline{C}))} && (2)\\
&= A \cap \overline{((B \cup \overline{C}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})})} && (3)\\
&= A \cap (\overline{(B \cup \overline{C})} \cup \overline{\overline{(B \cap \overline{C})}}) && (4)\\
&= A \cap \big((\overline{B} \cap C) \cup (B \cap \overline{C})\big) && (5)
\end{aligned}$$

(1): Különbség átírása a 19. Tétel szerint.
(2): Szimmetrikus differencia átírása a 19. Tétel szerint.
(3): Különbség átírása a 19. Tétel szerint.
(4): De Morgan azonosság alkalmazása a 18. Tétel szerint.
(5): De Morgan azonosság alkalmazása a 18. Tétel szerint, illetve alkalmazzuk ezen tétel második állítását is.

5. Alkalmazások

- Halmaz, mint absztrakt adattípus. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus.
- Java programozási nyelv: például Set interfész; AbstractSet, HashSet osztály.
  Programozó cégeknél szoktak ilyen kérdéseket feltenni, mint például a következő. Van egy tömb, melynek elemei tetszőlegesen nagy egész számok. Listázza azon számokat, melyek a tömbben páratlan sokszor szerepelnek. Mindenki elgondolkozhat, hogy ő hogyan csinálná. Több megoldás is van, a megoldás ötletességét szokták értékelni.
- Formális nyelvek és számítástudomány:
  - ábécé: előre rögzített, meghatározott jelek általában véges halmaza, például $\Sigma = \{$magyar nyelv által használt betűk és karakterek$\}$;
  - az ábécé elemei a karakterek, a karakterekből álló sorozatok a szavak, például Shakespeare minden műve egy-egy szó;
  - Σ^* az összes szavak halmaza;
  - Σ^* részhalmazai a nyelvek, például Shakespeare összes műve egy nyelv.
  - LÁSD: Bonyolultságelmélet kurzus.

A Turing-gép talán a számítógép működésének egyik legjobb matematikai modellje. Gondoljunk bele abba, hogy olyan programot kell írnunk, ami egy tetszőleges szóról eldönti, hogy palindrom-e. Nyilván ezt nagyon könnyen meg tudja mindenki csinálni. Azonban ha ezt valaki C-ben megírja, könnyen, még nem feltétlen olyan könnyű ezt elméletben megcsinálni. Például mit hol kell tárolni az algoritmus során, mekkora memóriahelyre lesz szükség, és mennyi ideig fog futni a program. Ilyen kérdéseket vizsgál a bonyolultságelmélet.

- Reguláris kifejezések: olyan string, amivel meghatározható stringek egy halmaza.
  Például az „a” kifejezés jelöli az „a” betűvel kezdődő szavak halmazát. Alapszintű programozásban gyakran van szükség hasonló kifejezésekre, például Linux alatt az egy mappában lévő összes pdf fájl kinyomtatása megtörténhet így:* `lpr *.pdf`*. Nem kell előtte összefésülni, hogy aztán egy darabban ki lehessen nyomtatni, vagy egyesével nyomtatgatni.*
- Fontos kiterjesztés: fuzzy-halmazok. Alkalmazásai: irányítástechnika, mesterséges intelligencia, elektronika. LÁSD: Mesterséges intelligencia kurzus.
  Matematikailag egy objektum mindig vagy eleme a halmaznak vagy nem. Azonban ez túlságosan leegyszerűsítheti a kategorizálást. Gondoljunk bele, hogy egy arcfelismerő robotot akarunk programozni, melynek az a feladata, hogy megmondja egy emberről (x), hogy szép-e ($x \in H$). Azonban nem feltétlen szeretnénk azt, hogy mindenki vagy szép, vagy nem szép legyen, ennél sokkal jobb minden emberhez egy számot hozzárendelni ($\mu(x)$), hogy mennyire szép. És ezzel már nem azt mérjük, hogy x eleme-e H-nak, hanem azt, hogy mennyire. Például, ha $\mu(x) = 0.95$, akkor ez közel van az 1-hez, tehát „nagyon benne van a halmazban”.
- Mandelbrot-halmaz és egyéb fraktálok.
  Szegedi fejlesztésű szoftver a Xaos, mely segítségével érdekes és szép geometriai alakzatokkal találkozhatunk. Ezeknek neve fraktálok. Például van olyan alakzat, melynek végtelen a kerülete, de véges a területe. (Kicsit furcsa lehet, de igaz, nem gépeltem félre.)
- Számelméleti halmazok: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Biológia: rendszertani kategorizálás.
  Lehet, bele se gondoltunk eddig, de akárki akármivel foglalkozik, halmazokban gondolkozik. A boltban nem összevissza vannak az áruk pakolva, hanem értelmes részhalmazokra bontva (élelmiszer, tisztítószer, autóalkatrész,...). A programnyelvek objektumorientáltak, vagy nem. Az iskolai érdemjegy egy 5 elemű halmazból kerül ki. (Érdekes, senki sem akar egy vizsgán 7-est kapni, pedig az is olyan szám, mint a többi. Mindenki tudja, hogy az alaphalmaz {1,2,3,4,5}.)
- Minden területen, mindenféle kategóriába sorolás halmazelméleti feladat. Ujjlenyomat keresése adatbázisban, telefonszám keresése telefonkönyvben, ... - ez mind olyan probléma, mely arra vezethető vissza, hogy egy adott objektum eleme-e egy halmaznak. Gyakorlatban a halmazokon már értelmezve van valami sorrendiségi reláció, így már nem pusztán matematikai halmazokról beszélhetünk, ahol a halmaz elemeinek sorrend-

je nem számít. LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek I. kurzus - Keresési és rendezési algoritmusok.

Például el lehet gondolkozni a következő feladaton. Van egy egész számokat tároló rendezett tömb, azaz a tömb elemei nagyság szerint sorba vannak rendezve. Eleme-e ennek a tömbnek egy megadott szám? Menjünk végig és keressük meg? Vagy ennél hatékonyabb eljárás is van? A probléma reális, ugyanaz, mintha egy szót keresnénk a szótárban. Aki csinált ilyet, szerintem az optimálisabb módszert is használta, csak fel se tűnt neki.

Relációk

Descartes-szorzat. Relációk szorzata, inverze. Relációk tulajdonságai.
Ekvivalenciareláció, osztályozás. Részbenrendezés, Hasse-diagram.

1. Descartes-szorzat

A kurzuson már megtanultuk mik a halmazok és milyen műveleteket tudunk végrehajtani velük. Az eddigi műveletek megőrizték az objektumok típusát. Például az $A \cup B$ halmaz elemei az A, B halmazok valamelyikéből kerülnek ki. A következőben bevezetett művelet (Descartes-szorzat) eredménye egy olyan halmaz lesz, melynek elemei rendezett objektumpárok.

1. Definíció. Tetszőleges két a, b objektum esetén értelmezhetjük az (a, b) elempár fogalmát. **Rendezett elempár**ról beszélünk, ha (a_1, b_1) pontosan akkor egyenlő (a_2, b_2)-vel, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$, azaz fontos a két elem sorrendje.

2. Definíció (Descartes-szorzat)**.** Legyen A, B két tetszőleges halmaz. Ekkor az A és a B halmaz **Descartes-szorzat**a az a halmaz, mely azokat a rendezett elempárokat tartalmazza, amiknek az első komponense A-nak, második komponense B-nek eleme. Jelölés: $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) :\ a \in A,\ b \in B\}$$

3. Példa.

$$A = \{1, 2, 3\},\ B = \{2, 3\}, \quad A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

4. Definíció (Descartes-négyzet)**.** Legyen A egy halmaz. Ekkor az A tetszőleges halmaz **Descartes-négyzet**e az a halmaz, mely azon rendezett elempárokból áll, amiknek mindkét komponense A-nak az eleme. Jelölés: A^2.

$$A^2 = A \times A = \{(a, b) :\ a \in A,\ b \in A\}$$

5. Példa.

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Ha A véges halmaz, és elemszáma m, illetve B is véges halmaz, és elemszáma n, akkor az $A \times B$ halmaz is véges és elemszáma $m \cdot n$. Ez egy egyszerű középiskolai feladatként is felfogható, és könnyen igazolható: hány különböző objektumot tehetünk az első helyre (válasz: $|A|$) és hány elemet tehetünk a második helyre (válasz: $|B|$)?

6. *Megjegyzés.* Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor $A \times B = \emptyset$.

7. *Megjegyzés.* Ha A és B két tetszőleges különböző halmaz, akkor $A \times B \neq B \times A$, tehát a Descartes-szorzat nem kommutatív. Ha $A = B$, akkor $A \times B = B \times A$.

2. Relációk

Látszólag a Descartes-szorzat csak egy újabb definíció, ami tulajdonképpen igaz is. Csak matematikailag így tehetjük precízzé a relációk bevezetését. A megfeleltetés és reláció tulajdonképpen a matematikában is bizonyos kapcsolatot fog jelenteni bizonyos dolgok között.

8. Definíció. Legyen A és B két tetszőleges halmaz. Az $A \times B$ Descartes-szorzat részhalmazait A-ból B-be menő **megfeleltetés**eknek nevezzük. Ekkor A az indulási halmaz, B pedig az érkezési halmaz.

9. Definíció. Legyen A egy halmaz. Az A^2 Descartes-négyzet részhalmazait **reláció**knak nevezzük. A relációkat általában a görög ábécé kis betűivel jelöljük.

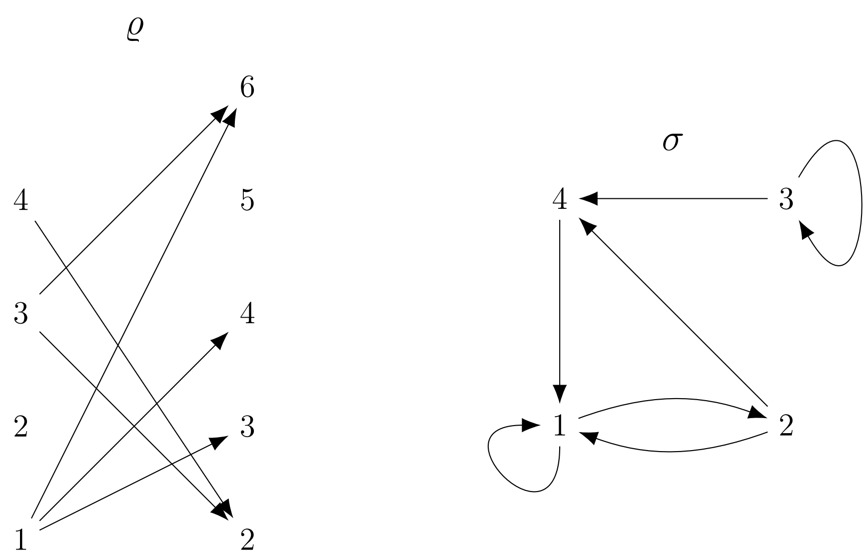
10. Példa. Vegyük az emberek halmazát (E). Látszólag az E^2 halmaznak nincs túl sok értelme. Miért is lenne mindenki a világon mindenkivel kapcsolatban? Valóban nincs. De ha mondjuk vesszük az összes (apa,fia) rendezett párt, akkor ez már egy értelmes reláció lesz az E halmazon.

11. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ két halmaz. Ekkor például a $\varrho = \{(1, 3), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 6), (4, 2)\}$ egy megfeleltetés A-ból B-be, és

$$\sigma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

egy reláció az A halmazon.

12. *Megjegyzés.* A megfeleltetések talán legszemléletesebb ábrázolása gráfokkal történik. A 11. Példa megfeleltetése és relációja a következő gráfokkal ábrázolhatók.

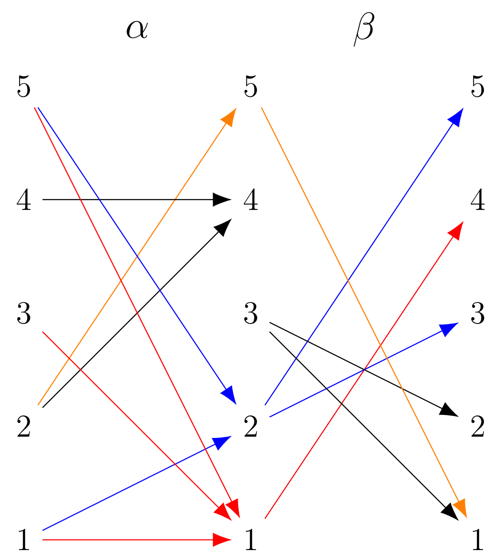


Természetesen a megfeleltetés nem ábrázolható a jobboldali módon, de a reláció ábrázolható lenne a bal oldali módon, ezt majd nemsokára fogjuk is használni.

13. Definíció. Legyen ϱ és σ két reláció az A halmazon, azaz $\varrho \subseteq A^2$ és $\sigma \subseteq A^2$. Ekkor a két **reláció szorzat**át $\varrho\sigma$-val jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

$$\varrho\sigma = \left\{(a,c) \in A^2 : \text{ létezik } b \in A, \text{ hogy } (a,b) \in \varrho \text{ és } (b,c) \in \sigma\right\}.$$

14. Példa. Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\alpha = \{(1,1),(1,2),(2,4),(2,5),(3,1),(4,4),(5,1),(5,2)\}$ és $\beta = \{(1,4),(2,3),(2,5),(3,1),(3,2),(5,1)\}$.



Ekkor $\alpha\beta = \{(1,4),(1,5),(1,3),(2,1),(3,4),(5,4),(5,5),(5,3)\}$. Mint látható, a definícióban szereplő b köztes elem a középső oszlopból a végeredményben nem jelenik meg. Vizuálisan az a kérdés, hogy mely bal oldali elemből tudok eljutni egy középső elemen keresztül valamelyik jobb oldaliba.

15. *Megjegyzés.* Fontos, hogy a $\beta\alpha$ szorzat kiszámításához ne ugyanezt az ábrát készítsük el, hanem a bal oldali részben a β-hoz tartozó nyilakat húzzuk be, míg jobb oldalon az α-hoz tartozókat.

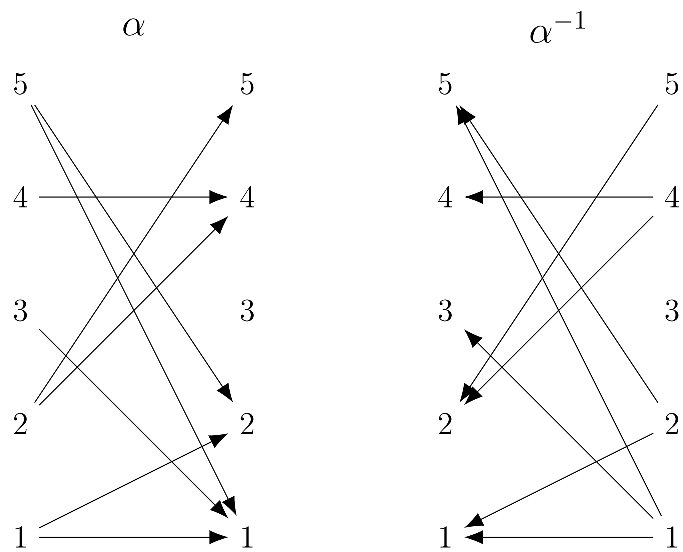
16. Definíció. Legyen σ egy reláció az A halmazon, azaz $\sigma \subseteq A^2$. Ekkor a **reláció inverzé**t σ^{-1}-gyel jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

$$\sigma^{-1} = \left\{(a,b) \in A^2 : (b,a) \in \sigma\right\}.$$

17. Példa. Az előző példa adatait használva kiszámítható, hogy

$$\alpha^{-1} = \{(1,1),(2,1),(4,2),(5,2),(1,3),(4,4),(1,5),(2,5)\}.$$

18. *Megjegyzés.* Vizuálisan az történik, hogy az inverzben az elemek közötti nyíl megfordul.



19. *Megjegyzés.* Mivel a reláció is halmaz, ezért relációk metszetéről, uniójáról, különbségéről, szimmetrikus differenciájától is beszélhetünk, de ezeket itt nem részletezzük. Ezek úgy működnek, mint egyszerű halmazok esetén, csak itt a halmazok elemei rendezett elempárok.

20. **Példa.** A 14. Példa adatait használva $\alpha \cap \beta = \{(2,5),(3,1),(5,1)\}$.

3. Relációk tulajdonságai

21. Definíció. Legyen A egy tetszőleges halmaz, és a $\sigma \subseteq A^2$ tetszőleges A-n értelmezett reláció.

(1) A σ reláció **reflexív**, ha bármely $a \in A$-ra teljesül, hogy $(a, a) \in \sigma$.
Például a $\varrho =$ „ $\leq$ ” $(\subseteq \mathbb{R}^2)$ reláció reflexív, mert bármely x valós számra teljesül, hogy $(x, x) \in \varrho$, azaz $x \leq x$.

(2) A σ reláció **szimmetrikus**, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$, akkor $(b, a) \in \sigma$.
Például az előbb említett ϱ reláció nem szimmetrikus, mert abból, hogy $3 \leq 4$ (azaz $(3, 4) \in \varrho$), nem következik, hogy $4 \leq 3$ (azaz $(4, 3) \in \varrho$). Az „ $=$ ” reláció már szimmetrikus.

1. *Megjegyzés.* Ha már egy ellenpéldát találunk, akkor kész vagyunk, egyetlen ellenpélda is bizonyítja, hogy a tulajdonság nem teljesül.

(3) A σ reláció **tranzitív**, ha bármely $a, b, c \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$ és $(b, c) \in \sigma$, akkor $(a, c) \in \sigma$.
Például a fenti ϱ reláció nyilván tranzitív, mert ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ is teljesül.

(4) A σ reláció **ekvivalenciareláció**, vagy röviden ekvivalencia, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív is egyszerre.

(5) A σ reláció **antiszimmetrikus**, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$ és $(b, a) \in \sigma$, akkor $a = b$.
Például a fenti ϱ reláció nyilván antiszimmetrikus, mert ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x \leq y \leq x$, ami azt jelenti, hogy $x = y$.

(6) A σ reláció **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív is egyszerre.

(7) A σ reláció **dichotom**, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül, hogy $(a, b) \in \sigma$ vagy $(b, a) \in \sigma$.
Például a ϱ reláció dichotom, mert bármely két valós számról el tudjuk dönteni, hogy melyik kisebb-egyenlő, mint a másik. A valós számokon értelmezett „ $<$ ” reláció már nem dichotom.

2. *Megjegyzés.* Ha egy reláció nem reflexív, akkor dichotom sem lehet. (Gondoljunk bele! A dichotomia definíciójában az a-ról és a b-ről nem tettük fel, hogy különbözőek legyenek.)

(8) A σ reláció **(teljes) rendezés**, ha részbenrendezés és dichotóm is egyszerre.

22. *Megjegyzés.* Ha egy relációt az irányított gráfjával adunk meg, akkor

- σ pontosan akkor reflexív, ha a gráf minden pontjában van hurokél;
- σ pontosan akkor tranzitív, ha teljesül az, hogy ha létezik út két pont között, akkor létezik 1 hosszú út is közöttük;
- σ pontosan akkor szimmetrikus, ha a gráf minden éle oda-vissza típusú él;
- σ pontosan akkor antiszimmetrikus, ha bármely két különböző pont között 0 vagy 1 irányban megy él;
- σ pontosan akkor dichotom, ha a gráf bármely két pontja között megy él.

23. Példa. Legyen σ a következő reláció: $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid x^2 + y^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Milyen tulajdonságok teljesülnek az σ relációra?
Megoldás:

(1) *Reflexivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, x) \in \sigma$, azaz hogy $2 \mid x^2 + x^2$. Ez nyilván teljesül, mert $x^2 + x^2 = 2x^2$, ami nyilván páros, ezért minden egész szám σ-relációban áll egymással. Tehát a reláció reflexív.
(2) *Szimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(y, x) \in \sigma$. Ez nyilván teljesül, mert $(x, y) \in \sigma \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff 2 \mid y^2 + x^2 \iff (y, x) \in \sigma$, azaz σ szimmetrikus.
(3) *Tranzitivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból és $(y, z) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(x, z) \in \sigma$. Nézzük meg!
$(x, y) \in \sigma \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff x^2 + y^2 = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \iff x^2 = 2k - y^2$
$(y, z) \in \sigma \iff 2 \mid y^2 + z^2 \iff y^2 + z^2 = 2l \ (l \in \mathbb{Z}) \iff z^2 = 2l - y^2$
Behelyettesítünk: $x^2 + z^2 = 2k + 2l - 2y^2 = 2\left(k + l - y^2\right) = 2m$, ahol $m \in \mathbb{Z}$. Így megkaptuk, hogy $2 \mid x^2 + z^2$, azaz $(x, z) \in \sigma$. Tehát a reláció tranzitív.
(4) Mind a három fenti tulajdonság teljesül, ezért a reláció *ekvivalencia(reláció)*.
(5) *Antiszimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból és $(y, x) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $x = y$. Rendkívül könnyen tudunk ellenpéldát találni, például $(2, 4) \in \sigma$, $(4, 2) \in \sigma$ és $2 \neq 4$.

    3. *Megjegyzés.* Nagyon kevés olyan reláció van, ami egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus is, de létezik ilyen, sőt már meg is volt említve egy ilyen reláció. Viszont az sem igaz, hogy egy relációra valamelyik mindig teljesül. Könnyen adható olyan reláció, amelyik se nem antiszimmetrikus, se nem szimmetrikus.

(6) Mivel az antiszimmetria nem teljesül, így α nem *részbenrendezés*, és ezért már *rendezés* sem lehet, de azért nézzük meg az utolsó tulajdonságot is.
(7) *Dichotomia:* Most azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$ vagy $(y, x) \in \sigma$. Nyilván egy páratlan-páros kombináció sem így, sem amúgy nincs benne a relációban, és így megint könnyen találtunk ellenpéldát (egyszerre végtelen sokat is). A reláció tehát nem dichotom.

4. Osztályozás

Ebben a fejezetben bevezetünk egy új halmazokhoz köthető fogalmat, majd megmutatjuk, hogy az ekvivalenciák halmazelméleti eszközökkel is vizsgálhatók.

24. Definíció. Legyen A egy tetszőleges halmaz. Ekkor a $\mathcal{C}$ halmazt **osztályozás**nak nevezzük, ha

(1) $\mathcal{C} \subseteq P(A)$,
(2) bármely $X \in \mathcal{C}$-re $X \neq \emptyset$,
(3) bármely $X, Y \in \mathcal{C}$-re $X = Y$ vagy $X \cap Y = \emptyset$, és
(4) $A = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$.

A $\mathcal{C}$ halmaz elemeit **osztály**oknak nevezzük.

Szóban így vonható össze az előbbi négy feltétel: $\mathcal{C}$ osztályozás az A halmazon, ha $\mathcal{C}$ az A nemüres (2) részhalmaziból áll (1), és minden A-beli elem (4) pontosan egy darab $\mathcal{C}$-beli halmaznak eleme (3). Tehát gyakorlatilag A elemeit kis (nemüres) kupacokba rendezzük. A kupac (osztály) egy halmaz az osztályozás pedig ezen kupacok (osztályok) halmaza.

25. Példa. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{3, 5\}\}$. (A színezésre egy későbbi példában lesz szükségünk.) A $\mathcal{C}$ halmaz osztályozás, mert minden A-beli elem szerepel pontosan egy osztályában, és egyik osztály sem üres.

Ekvivalenciareláció – osztályozás

26. Tétel. *Egy A halmaz feletti $\mathcal{C}$ osztályozás meghatároz egy ekvivalenciát a következő módon:*

$$\rho_{\mathcal{C}} = \left\{(a, b) \in A^2 : \exists X \in \mathcal{C},\ \textit{hogy}\ a, b \in X\right\}.$$

Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az egy osztályban lévő elemek egymással mindenhogy relációban állnak.

27. Példa. Az előző példában szereplő osztályozáshoz felírható reláció:

$$\rho_{\mathcal{C}} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 4), (3, 3), (3, 5), (5, 3), (5, 5)\}.$$

A színezés azt jelöli, hogy mely osztályokhoz mely relációbeli elemek tartoznak.

28. Tétel. *Ha ρ ekvivalencia az A halmazon, akkor az $A/\rho = \{b\varrho* : b \in A\}$ halmaz osztályozás A-n, ahol $b\rho* = \{c \in A : (b, c) \in \rho\}$.*

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy egy ekvivalenciarelációhoz felírható egy olyan osztályozás, amelyben az egymással relációban lévő elemek ugyanabban az osztályban vannak.

Mire jó ez? Mindig áttérhetünk ekvivalenciáról osztályozásra, illetve osztályozásról ekvivalenciára, és azzal dolgozhatunk, amelyikkel nekünk kényelmesebb.

29. Példa. Térjünk vissza a 23. Példában bemutatott σ relációra, amiről beláttuk, hogy ekvivalencia. Ekkor nyilván van egy hozzá tartozó osztályozás. Adjuk ezt meg.
Megoldás:

Keressünk egymással relációban álló számokat: $(0,2), (0,4), (0,6), (2,4), (2,6), \ldots \in \sigma$. Nyilván végtelen sok van, de az azért látszik hogy a páros számok a páros számokkal relációban vannak, ezért nyilván egy osztályban vannak. Mivel osztályozást keresünk, így a páratlan számokat is kell valahova tennünk. Könnyen rájöhetünk, hogy a páratlan számok relációban állnak a páratlan számokkal, ugyanis páratlan számok négyzete szintén páratlan, és két páratlan szám összege már páros, ezért teljesül a reláció feltétele. Így már van két osztályjelöltünk, a páros számok, és a páratlan számok halmaza. Most már csak azt kell belátni, hogy páratlan szám nem állhat relációban páros számmal, hogy valóban két különböző osztályt kapjunk. Ez pedig könnyű, mert páros szám négyzete páros, páratlané páratlan, és egy páros és egy páratlan szám összege páratlan, ami nyilván nem osztható kettővel, így nem teljesülhet a reláció feltétele.

Tehát a keresett $\mathcal{C}_\sigma$ osztályozásnak két osztálya van, a páros és páratlan egész számok, azaz $\mathcal{C}_\sigma = \{\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$.

30. *Megjegyzés.* Az előző példában láttuk, hogy végtelen halmazt is tudunk osztályozni. Erre több lehetőség is van. Vegyük példának a $\mathbb{Z}$ egész számok halmazát.

- $\mathcal{C}_1 = \{\{x, x+1\} \colon x \text{ páros}\}$ egy olyan osztályozás, melyben végtelen sok osztály van, de mindegyik 2-elemű.
- $\mathcal{C}_2 = \{\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}\}$ egy olyan osztályozás, melyben 2 darab osztály van, és mindkét osztály végtelen sok elemet tartalmaz.
- $\mathcal{C}_3 = \{\{-1,0,1\}, \{\pm x \colon x \text{ legkiseb prímosztója } p, p = 2,3,5,\ldots\}\}$ egy olyan osztályozás, melynek van egy háromelemű osztálya és végtelen sok végtelen sok elemet tartalmazó osztálya.

5. Részbenrendezés, Hasse-diagram

Az előző fejezetben az ekvivalenciarelációkat vizsgáltuk meg. Most megnézzük milyen fontos tulajdonságai vannak egy részbenrendezésnek.

31. Definíció (Emlékeztető)**.**

- Egy A halmaz esetén az A^2 halmaz részhalmazait **reláció**knak nevezzük.
- Egy reláció **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.
- Egy reláció (teljes) **rendezés**, ha részbenrendezés és dichotóm.

32. Definíció. Egy $(A; \leq)$ párt **részbenrendezett halmaz**nak nevezünk, ha A egy nemüres halmaz, „$\leq$” pedig egy tetszőleges részbenrendezés az A halmazon.

Tehát a részben rendezett halmaz egy halmaz és egy rajta rögzített részbenrendezési reláció. A szimmetria hiánya teszi lehetővé, hogy bizonyos nagyság szerinti megkülönböztetést vezessünk be a részben rendezett halmazban. (A „nagysághoz” kell egy rendezés, mely eldönti két elemről, hogy egyáltalán össze tudjuk-e hasonlítani őket, és ha igen, akkor melyik van a reláció bal és melyik a jobb oldalán.)

33. Definíció. Legyen $(A; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, $a, b \in A$. Ekkor jelölje $a < b$ azt, hogy $a \leq b$, de $a \neq b$. Jelölje $a \prec b$ azt, hogy $a < b$, és nincs olyan $x \in A$, melyre $a < x$ és $x < b$ teljesülne. Ha $a \prec b$, akkor azt mondjuk, hogy b **követ**i a-t, a $\prec$ relációt **követési reláció**nak nevezzük.

34. Tétel. *Ha $(A; \leq)$ véges részbenrendezett halmaz, akkor tetszőleges $a, b \in A$ elemekre az alábbi két állítás ekvivalens:*

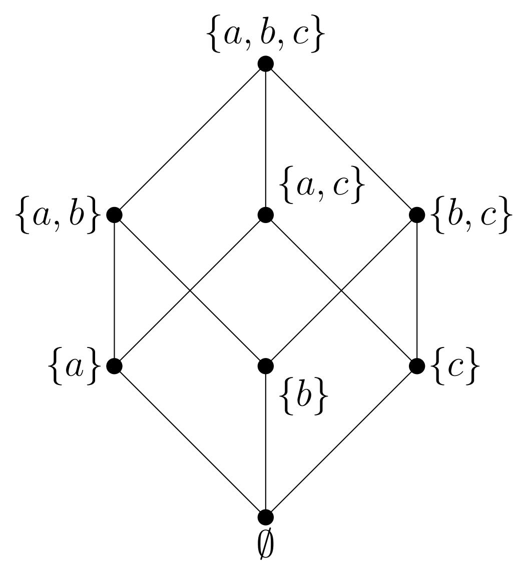
- $a \leq b$;
- *létezik $n \in \mathbb{N}_0$ és léteznek $c_0, c_1, \ldots, c_n \in A$ elemek úgy, hogy $a = c_0 \prec c_1, \ldots, c_{n-1} \prec c_n = b$.*

A tétel azt jelenti, hogy a $\prec$ követési reláció meghatározza a részbenrendezést.

A részbenrendezés gráfos ábrázolása helyett szemléletesebb a követési relációt ábrázolni, erre szolgál a Hasse-diagram.

35. Definíció (Hasse-diagram)**.** Egy tetszőleges $(A; \leq)$ részbenrendezett halmaz **Hasse-diagram**ja olyan irányított gráf, amelyben a részbenrendezett halmaz A alaphalmazának az elemei alkotják a gráf pontjait, és a gráfban az a és b pontok között pontosan akkor halad él, ha $a \prec b$. Az él irányítását a diagramon úgy ábrázoljuk, hogy a b pontot az a pont fölött helyezzük el. A reflexivitásból adódó hurokéleket a diagramon nem ábrázoljuk.

36. Példa. Legyen adott az $A = \{a, b, c\}$ háromelemű halmaz. A $(\mathcal{P}(A); \subseteq)$ pár bizonyíthatóan részbenrendezett halmaz, és a Hasse-diagramja a jobb oldali ábrán látható.



Mivel van valamiféle „nagyság” bevezetve a halmazon ezért extremális elemeket is kereshetünk erre a nagyságra nézve.

37. Definíció. Legyen $(A; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz, $a \in A$ pedig egy tetszőleges elem.

- Az a **maximális eleme** A-nak, ha nem létezik olyan $x \in A$, melyre $a < x$.
- Az a **minimális eleme** A-nak, ha nem létezik olyan $x \in A$, melyre $x < a$.
- Az a **legnagyobb eleme** A-nak, ha minden $x \in A$ elemre $x \leq a$.
- Az a **legkisebb eleme** A-nak, ha minden $x \in A$ elemre $a \leq x$.

38. Tétel (vagy megjegyzés)**.** *Ha a az $(A; \leq)$ részbenrendezett halmaz legnagyobb eleme, akkor a maximális elem is. Ugyanez igaz legkisebb és minimális elemre.*

39. Tétel (vagy megjegyzés)**.** *Legnagyobb és legkisebb elemből legfeljebb egy darab létezhet egy $(A; \leq)$ részbenrendezett halmazban, maximális és minimális elem több is lehet.*

40. Példa. Az előző példában lévő részbenrendezett halmaz legnagyobb (és egyben maximális) eleme $\{a, b, c\}$, a legkisebb (és egyben minimális) eleme $\emptyset$.

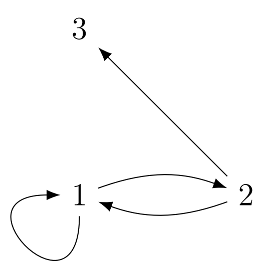
6. Reláció lezártja

41. Definíció. A ϱ reláció **reflexív lezártján** azt a legszűkebb ϱ-t tartalmazó relációt értjük, ami reflexív. Hasonlóan a ϱ **szimmetrikus (tranzitív) lezártja** az a legszűkebb ϱ-t tartalmazó reláció, amely szimmetrikus (tranzitív).

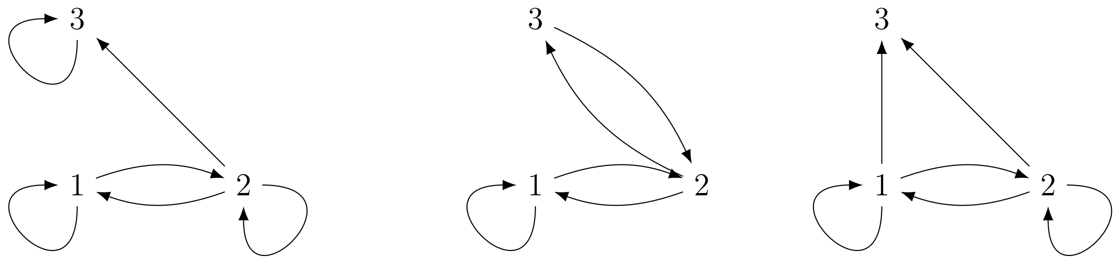
42. Tétel. *Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ reláció, ekkor*

- *ϱ reflexív lezártja: $\varrho \cup \{(a, a) \colon a \in A\}$,*
- *ϱ szimmetrikus lezártja: $\varrho \cup \varrho^{-1}$,*
- *ϱ tranzitív lezártja: $\varrho \cup \varrho^2 \cup \cdots \cup \varrho^n \cup \ldots$.*

43. Példa. Tekintsük a következő relációt:



Az előző reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív lezártja rendre:



7. Informatikai alkalmazások

- Relációs adatmodell. Tegyük fel, hogy bizonyos személyek neveit és címeit biztonsági okokból két külön adatbázisban (esetleg két külön rendszerben) tároljuk. Az első minden névhez egy azonosító kódot tartalmaz, a második minden kódhoz hozzárendel egy címet. A két „tábla” egymás nélkül használhatatlan. Ahhoz, hogy „lekérdezzük” valaki(k)nek a címét, tulajdonképpen egy megfeleltetésszorzást kell alkalmaznunk, először a (név, kód) párt határozzuk meg, ezután a (kód, cím) párt, ebből kapunk (név, cím) párt. Ez két megfeleltetés összeszorzása.
- Rendezési algoritmusok. Adott egy véges halmaz, rendezzük az elemeit a megadott rendezési reláció szerint. (LÁSD: Algoritmusok és adatszerkezetek kurzus.)
- Post-háló és Post tétele. LÁSD: Logika és informatikai alkalmazásai kurzus.
- Egy gráf erősen összefüggő komponensei az elérhetőségi reláció által meghatározott osztályai a gráf csúcshalmazának. Informatikai a probléma, mert minden irányított gráfot elképzelhetünk úgy, mint egy számítógép-hálózat reprezentációja, és minden hálózat reprezentálható gráffal. Ha van gráf, akkor van reláció is, ami algebrai eszközökkel vizsgálható.

8. Alkalmazások

- Partícionális információs struktúra. Elsősorban játékelméleti probléma, arról szól, hogy egy játékos nem ismeri, hogy jelenleg mi az állás, de pontosan tudja, hogy az állásról az általa birtokolt információkból mik a lehetséges és nem lehetséges lépések, ami kételemű partíciója az állások halmazának. Ezt általában feltételként szokták alkalmazni, észszerű, hogy miért. Tehát arról van szó, hogy például sakkban egy p állásból látszik, hogy mely s_i állásokba lehet egy lépéssel eljutni. Ekkor a (p, s_i) állások relációban vannak.
- Minden kategorizálási feladat tulajdonképpen osztályozás. Például, ha iratokat rendezünk mappákba, akkor nyilván nem akarjuk, hogy maradjon üres mappa (illetve ha mégis, akkor az nem része a kategorizálásnak), illetve minden iratot pontosan egy mappába szeretnénk betenni. Ez tulajdonképpen az osztályozás definíciója (osztály=mappa, irat=elem).

- Biológia: rendszertani osztályozás, minden (ismert) élőlény beletartozik pontosan egy fajba, és nyilván nem tartunk számon olyan fajt, aminek nem létezik (soha nem is létezett) egyede.

Leképezések

Leképezések tulajdonságai. Számosságok.

1. Leképezések tulajdonságai

A továbbiakban legyen A és B két tetszőleges halmaz. Idézzünk fel néhány definíciót.

1. Definíció (Emlékeztető)**. Reláció**knak nevezzük az $A \times A$ részhalmazait, azaz σ reláció, ha $\sigma \subseteq A \times A\,(= A^2)$. Egy A-ból B-be menő **megfeleltetés** az $A \times B$ részhalmaza, azaz σ egy $A \to B$ megfeleltetés, ha $\sigma \subseteq A \times B$.

Tehát a reláció egy adott halmazon belüli elemek között állít fel kapcsolatot, míg a megfeleltetés két különböző halmazt kapcsolhat össze. Egy jól ismert fogalmat fogunk most bevezetni, ami egy speciális megfeleltetés.

2. Definíció. Az $f \subseteq A \times B$ megfeleltetést **leképezés**nek nevezzük, ha bármely $a \in A$-hoz létezik *pontosan egy* olyan $b \in B$, amelyre $(a, b) \in f$. A b elemet az a elem **kép**ének nevezzük, az a-t pedig a b **ős**ének.

Ezt a fogalmat eddig talán mindenki függvény néven ismerte. Minden értelmezési tartományhoz tartozó x-hez tartozott egy $f(x)$ érték. Tehát az $(x, f(x))$ párok alkották a leképezést. Ugye, hogy senki sem gondolt eddig a függvényre úgy, mint rendezett számpárok halmaza? Na akkor épp itt az ideje elkezdeni.

A továbbiakban tekintsük át a leképezések legfontosabb tulajdonságait.

3. Definíció. Az $f : A \to B$ leképezés **injektív**, ha bármely $a_1, a_2 \in A$-ra teljesül, hogy ha $a_1 f = a_2 f$, akkor $a_1 = a_2$. Más szóval, különböző elemek képe különböző.

Az előző definícióban szereplő $a_1 f$ kifejezés azt jelenti, hogy az a_1 képe az f leképezés mellett. Szándékosan nem a függvényeknél megszokott $f(a_1)$ jelölést használjuk, de azzal egyenértékű. De még egyszer szeretnénk hangsúlyozni, hogy az f leképezés egy elempárokból álló halmaz, tehát az $af = b$ jelölést ekvivalens az $f(a) = b$ és $(a, b) \in f$ jelölésekkel.

4. Definíció. Az $f : A \to B$ leképezés **szürjektív**, ha bármely $b \in B$-hez létezik olyan $a \in A$, amelyre $f(a) = b$. Más szóval, minden B-beli elemnek van őse A-ban.

5. Definíció. Az $f : A \to B$ leképezés **bijektív**, ha injektív és szürjektív.

6. Példa. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $xf = x^2$ leképezés nem injektív, mert $(-2)f = 2f = 4$. A $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $xg = \log x$ leképezés injektív, mert a logaritmus egy szigorúan monoton növő függvény, ezért különböző elemek képe is különböző.

Továbbá az f leképezés nyilvánvalóan nem szürjektív. Van olyan szám, melynek a leképezés melletti képe -5? Nincs, tehát nem szürjektív. (Ha a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $xf = x^2$ leképezést tekintenénk, akkor már szürjektív lenne.) A g leképezés szürjektív. Tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ elem őse az e^y, mert $e^y \mapsto y$.

7. Példa. Vizsgáljuk meg a $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto |n-3|+1$ leképezés tulajdonságait.

Injektivitás: Tegyük fel, hogy $|n-3|+1 = |m-3|+1$. Ez ekvivalens azzal, hogy $|n-3| = |m-3|$, vagyis $n-3 = \pm(m-3)$. Két eset van: $n-3 = m-3$, vagy $n-3 = 3-m$. Az első esetben azt kapjuk, hogy $n = m$, és ezt kell kapnunk, ahhoz hogy injektív legyen, de meg kell vizsgálni a másik esetet is. A második eset azzal ekvivalens, hogy $n+m = 6$, azaz $m = 6-n$. Ez azt jelenti, hogy $ng = (6-n)g$, természetesen csak akkor, ha $6-n \in \mathbb{N}$. De van olyan (elég) kicsi $n \in \mathbb{N}$, amelyre még $6-n \in \mathbb{N}$, például $n = 5$. Ekkor azt kaptuk, hogy $5g = 1g$, viszont $5 \neq 1$, tehát a g leképezés NEM injektív. A kapott ellenpélda ránézésre is megmondható, nem fontos végig levezetni.

8. *Megjegyzés.* Ha már egy ELLENPÉLDÁT találunk, akkor kész vagyunk, egyetlen ellenpélda is bizonyítja, hogy a tulajdonság nem áll fenn.

9. *Megjegyzés.* A tulajdonság vizsgálatában segíthet az ábrázolás és a vízszintes vonal teszt.

Szürjektivitás: Rögzítünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{N}$ számot, és keresünk hozzá egy megfelelő $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $ng = y$. Keressük az n számot a következő egyenlet megoldásaként: $|n-3|+1 = y$. Ez azzal ekvivalens, hogy $|n-3| = y-1$. Nekünk nem az összes olyan szám kell, aminek a képe y, elég csak egyet találnunk, ezért elhagyhatjuk az abszolútérték jelet. Ekkor azt kapjuk, hogy $n-3 = y-1$, azaz $n = y+2$. Mit kaptunk? Azt hogy bármely $y \in \mathbb{N}$ számra teljesül, hogy $(y+2)g = y$. Tehát minden y-hoz található ős, ezért a leképezés szürjektív.

10. *Megjegyzés.* A tulajdonság vizsgálatában segíthet az ábrázolás és a vízszintes vonal teszt.

Bijektivitás: A fenti g leképezés nyilván NEM bijektív, mivel nem injektív.

2. Számosságok

Ebben a fejezetben egy olyan fogalomkört veszünk górcső alá, ami a mindennapi alkalmazások során elég kevéssé jelenik meg. Ezek a végtelen halmazok. (Vegyük észre, hogy a fizikusok jelenlegi álláspontja alapján véges sok atom van a világegyetemben. A számítógép véges sok adat tárolására képes. Ettől függetlenül a végtelen halmazok vizsgálata elméleti szinten kikerülhetetlen, és egyébként meg érdekes is.) Végtelen halmazok esetén az elemszám helyett a számosság fogalmat használjuk. Minden halmaznak van számossága, ami véges halmaz esetén természetesen megegyezik a jól ismert elemszám fogalommal.

11. Példa. Az $A = \{0, a\}$ halmaz véges, elemszáma kettő, azaz $|A| = 2$.

Találkoztunk már végtelen számosságú halmazokkal. Ilyen volt például az egész számok halmaza, vagy éppen a valós számok halmaza. Eddig nem nagyon gondolkoztunk azon, hogy tulajdonképpen sehol nem tudjuk az egész halmazt realizálni. (Ezt ne is tegyük, mert gyakorlatban lehetetlen.) Ami fontosabb kérdés, hogy mindkettőre azt mondjuk végtelen a számossága. De ugyanannyi, vagy nem? Esetleg van „kisebb” és „nagyobb” végtelen? Van. Először azonban lendüljünk túl azon a problémán, hogy két halmaz számosságát mikor tekintjük azonosnak.

Véges halmazok elemszáma pontosan akkor egyenlő, ha mindegyiknek ugyanannyi eleme van. Ez végtelen halmazok esetén is így lesz, csak nem mondhatjuk, hogy két halmaz számossága pontosan akkor egyenlő, ha számosságuk végtelen. A halmazok számosságát bijekciók segítségével tudjuk összehasonlítani, ugyanis egy bijekció tulajdonképpen párba állítja két halmaz elemeit.

12. Definíció. Az A és B halmazok **számossága egyenlő**, ha létezik $A \to B$ bijektív leképezés.

Most már van értelme bizonyos számosságokat elnevezni, mert meg tudjuk mondani, hogy egy halmaz számossága mikor egyezik meg ezzel.

13. Definíció. Az $\mathbb{N}$ halmaz számosságát **megszámlálhatóan végtelen**nek nevezzük, és $\aleph_0$-lal jelöljük, azaz $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

14. Definíció. Az $\mathbb{R}$ halmaz számosságát **kontinuum számosság**nak nevezzük, és c-vel jelöljük, azaz $|\mathbb{R}| = c$.

15. Példa. A $B = \{\text{pozitív páros számok}\}$ halmaz végtelen számossága $|B| = \aleph_0$. Az $f : \mathbb{N} \to B,\ xf = 2x$ leképezés bijekció az $\mathbb{N}$ és B halmazok között, így számosságuk megegyezik.

Első olvasásra kicsit meglepő lehetett az előző példa. Pontosan „fele annyi” páros szám van, mint pozitív egész szám. Mégis megegyezik a számosságuk? (Ugye, milyen érdekes?)

Vizsgáljuk meg akkor, hogy vannak-e különböző végtelenek? (Eddig csak két elnevezésünk van: $\aleph_0$ és c. Azt még nem tudjuk, hogy különbözőek.) Be kell vezetni egy relációt, ami két számosságot megkülönböztet nagyság szerint.

16. Definíció. Az A halmaz **számossága kisebb vagy egyenlő**, mint a B halmaz számossága, azaz $|A| \leq |B|$, ha létezik $A \to B$ injektív leképezés.

Bármennyire is absztraktnak tűnik, ez van véges esetben is. Ha $|A| \leq |B|$, akkor megpróbálunk minden A-beli elemhez hozzárendelni egy B-beli elemet. És azt tapasztaljuk, hogy B-ben van még párosítatlan elem ($|A| < |B|$) vagy nincs ($|A| = |B|$).

17. Tétel. *Ha A egy tetszőleges halmaz akkor $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. (Ez végtelen A halmazokra is igaz, azonban ennek megértéséhez már magasabb fokú halmazelméleti ismeretekre lenne szükség, ami nem tartozik a tantárgy keretei közé.)*

18. Példa. Mivel $|\emptyset| = 0$, így $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$ és $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))| = 8$.

Amiért felemlegettük a hatványhalmazt, az a következő állítás.

19. Tétel. *Tetszőleges A halmaz esetén $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$, sőt $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

20. Tétel. $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Tehát vannak kisebb-nagyobb számosságok. Legnagyobb nincs, mert ha lenne, akkor a hatványhalmaza nagyobb számosságú lenne. A legkisebb számosságú halmaz *az* üres halmaz.

21. Állítás. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{T}| = c$.

22. Tétel. *Az $\aleph_0$ a legkisebb végtelen számosság.*

Mint említettük a bevezetett $\leq$ egy reláció. Tehát vizsgálhatjuk a tulajdonságait, mint reláció.

23. Tétel.

(1) (Dichotomia) Tetszőleges A és B halmazok esetén$|A| \leq |B|$ vagy $|B| \leq |A|$.
(2) (Antiszimmetria) Tetszőleges A és B halmazok esetén ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.

A gyakorlaton főleg az alábbi fontos tételt fogjuk masszívan használni.

24. Tétel (Számosságaritmetika alaptétele)**.** *Ha az A és B halmazok közül valamelyik végtelen számosságú, akkor*

$$|A \cup B| = |A \times B| = \max(|A|, |B|).$$

25. Példa.

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

3. Alkalmazások

- Egy programnyelvben a beépített véletlenszám-generátor a $[0;1]$ intervallumból ad vissza értéket (egyenletes eloszlással). Nekünk a dobókocka imitálására van szükségünk. A feladat egy leképezéssel könnyen megoldható, ahol a $[0;1]$ intervallum számait kell leképezni az $\{1,2,3,4,5,6\}$ számhalmazra. (A leképzés itt egy programozástechnikai függvény.)
- Digitalizálás: egy analóg jel digitalizálásakor végtelen sok különböző állapotról kell leképeznünk véges állapothalmazra, mivel a számítógép diszkrét működésű. Például a szemmel érzékelhető színeket (természetesen annak csak egy sokkal „kisebb” méretű részhalmazát) RGB-kóddal jeleníthetjük meg a számítógépen. (A $(\pi, \sqrt{2}, e)$ színt meg tudjuk jeleníteni? Miért igen, vagy nem? Milyen tulajdonságú akkor az „RGB-leképezés”?)

- Kódolás (titkosítás): olyan leképezés, mellyel egy üzenet képe csak a leképezés inverzével együtt olvasható, azaz a kódoló és dekódoló leképezés szorzata az identikus leképezés. Nem kell a leképezésnek bijektívnek lennie, de az injektivitást meg kell követelni.
- Programozás: szintaktikai és szemantikai szabályok szerint leképezzük a végrehajtandó feladatot egy adott programnyelvre. (A compiler természetes még ezt is tovább képezi alacsonyabb szintű programokra.) Itt a leképezés inkább csak köznyelvileg értendő, ugyanis a leképezést a programozó végzi, miközben a programot írja. Ez nem matematikai leképezés, de bizonyos szinten ugyanarról van szó.
- Maga a nyelv is leképezés, a gondolatainkat képezzük le különböző nyelvi eszközökre. Ez a leképezés nem injektív, például a „fog” szó bizonyítja ezt. Nyilván nem is szürjektív. Van bármi jelentése a „jksfdgűhlk” szónak?

Komplex számok

Komplex számok és alakjaik,
számolás komplex számokkal.

1. Komplex számok

A komplex számokra a valós számok kiterjesztéseként van szükség. Ugyanis már középiskolában előkerülnek olyan másodfokú egyenletek, melyeknek a valós számok között nincs megoldása. Felmerülhet tehát a kérdés, hogyan kell a valós számokat kiterjeszteni úgy, hogy a másodfokú egyenleteknek mindig legyen megoldása, de a valós számoknak az eddig megismert tulajdonságai az új számok között is érvényesek maradjanak. A komplex számok használata többek között ezt a problémát oldja meg.

1. Definíció. A **komplex számok** halmazát $\mathbb{C}$-vel jelöljük, és $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

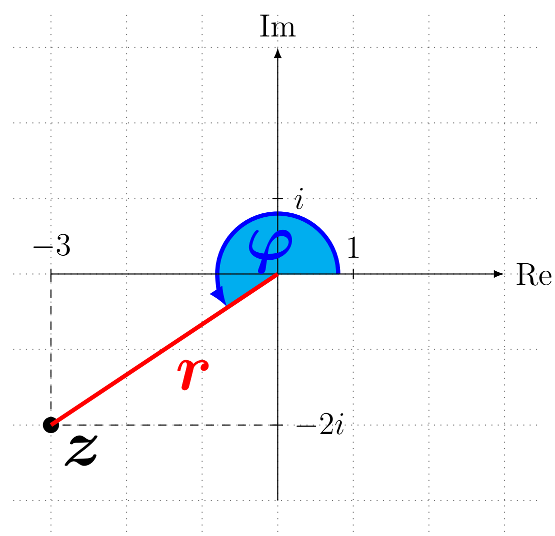
2. Definíció. Legyen $z \in \mathbb{C}$, $z = (a, b)$ egy komplex szám. Ekkor a z **kanonikus alak**ja

$$z = a + b \cdot i.$$

A z komplex szám **trigonometrikus alak**ja

$$z = r\left(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\right),$$

ahol $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, és $\varphi = \arg(z)$ az a szög, amivel a valós tengely pozitív felét el kell forgatni az origó körül úgy, hogy átmenjen a z-nek megfelelő ponton.

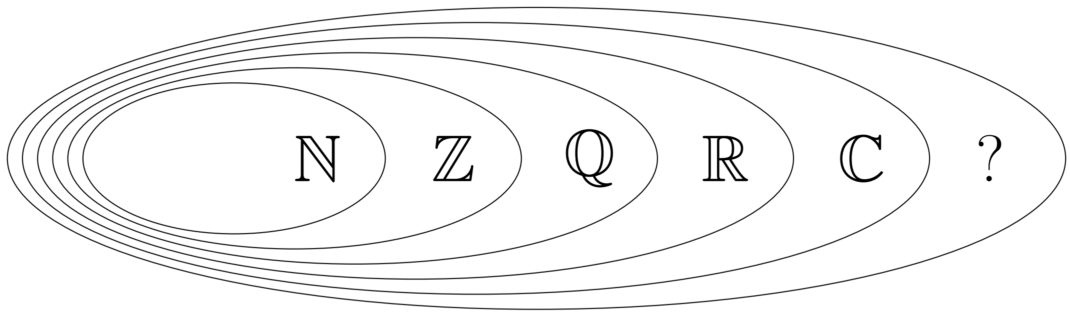


3. Példa. $(2, 2) = 2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4})$

A kanonikus alakban szereplő i egy kitüntetett komplex szám.

4. Definíció. A $z = (a, b)$ komplex szám $z = a + bi$ kanonikus alakjában szereplő a valós számot z **valós rész**ének, b valós számot z **képzetes rész**ének nevezzük. Más jelöléssel $z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$. Az i a **képzetes egység**. Az i olyan komplex szám, amelynek a négyzete -1, azaz $i^2 = -1$.

Az előbbi definíciókból látható, hogy ez az új számfogalom valóban a valós számok kiterjesztéseként értelmezhető. Ugyanis minden r valós szám egy $(r, 0)$ alakú komplex számnak felel meg, azaz olyan komplex számnak, melynek a képzetes része nulla. Az ismert számhalmazok viszonyát a következő Venn-diagram mutatja. A kurzus keretében nem tárgyaljuk, hogy miként bővíthetők a komplex számok, ha egyáltalán lehetséges ilyen bővítés.



1. ábra.

Ha már számoknak nevezzük a komplex számokat, akkor jogosan elvárt a részünkről, hogy számolni is tudjunk velük. A következőben definiáljuk, hogyan végezhetjük el a komplex számok között a jól ismert műveleteket. (Természetesen ezt valahogy úgy kell megtenni, hogy a valós számokon ugyanaz legyen a művelete eredménye.)

5. Definíció. Legyenek z_1 és z_2 a következő kanonikus alakú komplex számok:

$$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di.$$

Ekkor definiálhatjuk a következő **műveletek**et.

- *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$
- *Ellentett:* $-z_1 = -a - bi.$
- *Kivonás:* $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i.$
- *Szorzás:* $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$
- *Konjugált:* $\overline{z_1} = a - bi.$
- *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{z_1\overline{z_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$
- *Osztás:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

A definícióban látható, hogy komplex számok kanonikus alakjával pontosan úgy számolunk, mint az algebrai kifejezésekkel. Tehát a képzetes egységre gondolhatunk úgy, mint egy változó, de fontos, hogy ki kell használnunk az i azon tulajdonságát, mely szerint $i^2 = -1$.

Tehát ha a képzetes egységnek egy magasabb hatványával találkozunk, akkor fel kell használnunk az előbb említett tulajdonságot, mert egy kanonikus alakban nem szerepelhet i-nek magasabb hatványa. A képzetes egység minden magasabb hatványa átírható az $1, -1, i, -i$ komplex számok valamelyikére.

6. Példa.

- $i^{221} = i^{220} \cdot i = \left(i^2\right)^{110} \cdot i = (-1)^{110} \cdot i = 1 \cdot i = i.$
- $i^{43} = i^{42} \cdot i = \left(i^2\right)^{21} \cdot i = (-1)^{21} \cdot i = (-1) \cdot i = -i.$
- $i^{1262} = \left(i^2\right)^{631} = (-1)^{631} = -1.$

A következő példában bemutatjuk, hogyan történik a fent definiált műveletek elvégzése adott komplex számok esetén.

7. Példa. $z_1 = (1, -1)\,,\ z_2 = (-4, 5)$

- **Kanonikus alak:** $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -4 + 5i.$
- **Trigonometrikus alak:** $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$. (A z_2 trigonometrikus alakja nem szép, ugyanis nem látjuk a nevezetes szöget.)
- **Műveletek:**
  - *Összeadás:* $z_1 + z_2 = (1 - 4) + (-1 + 5)i = -3 + 4i.$
  - *Ellentett:* $-z_2 = 4 - 5i.$
  - *Kivonás:* $z_2 - z_1 = (-4 - 1) + (5 - (-1))i = -5 + 6i.$
  - *Szorzás:* $z_1 z_2 = (1 - i)(-4 + 5i) = -4 + 5i + 4i + 5 = 1 + 9i.$
  - *Konjugált:* $\overline{z_1} = 1 + i.$
  - *Abszolútérték:* $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$
  - *Osztás:*

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-4 + 5i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{-4 - 4i + 5i - 5}{1^2 - i^2} = \frac{-9 + i}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}i.$$

8. *Megjegyzés.* Fontos, hogy a végeredményt valamelyik ismert alakban adjuk meg. A $\frac{3}{i}$ hiába rövid, nem kanonikus (vagy trigonometrikus) alakban van. El kell végezni ezt az osztást, és a végeredmény $-3i$.

9. Tétel. *Ha $z_1 = a_1 + b_1 i$ és $z_2 = a_2 + b_2 i$ két komplex szám, akkor $z_1 = z_2$ pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$.*

A komplex számok trigonometrikus alakja megengedi, hogy geometriai szempontból vizsgáljuk a komplex számokat. A következő tételben összefoglaljuk, hogyan történik a fentebb már definiált műveletek elvégzése trigonometrikus alak esetén.

10. Tétel. *Legyenek z_1 és z_2 a következő trigonometrikus alakú komplex számok:*

$$z = r\left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right),\ w = s\left(\cos\psi + i \sin\psi\right).$$

Ekkor

- $z \cdot w = rs\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right)$;
- $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\left(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)\right)$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$;
- $\overline{z} = r\left(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right)$;
- *tetszőleges* $n \in \mathbb{N}_0$ *számra* $z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$;
- *ha* $z \neq 0$, *akkor tetszőleges* $n \in \mathbb{N}$ *számra* $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, *azaz minden nemnulla komplex számnak pontosan* n *darab* n*-edik gyöke van.*

A tételben szereplő állítások geometriai jelentőséggel bírnak. Minden komplex számnak a Gauss-féle számsíkon megfelel egy pont. Például egy komplex szám konjugáltjának megfelelő pont, az eredetinek a valós tengelyre vett tükörképe. Egy komplex szám n-edik gyökei, pedig egy meghatározott sugarú körvonalon vannak és egy szabályos n-szöget határoznak meg.

11. Példa. Legyen $z = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ és $w = (1, -1)$ két komplex szám.

- $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $w = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;
- $zw = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$;
- $\frac{z}{w} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{19\pi}{12}\right)\right)$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;
- $\overline{w} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right)$;
- $w^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(6 \cdot \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(6 \cdot \frac{7\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i$;
- $\sqrt[3]{z} = x: \quad x_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}/3\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{18} + i\sin\frac{\pi}{18}\right)$,
  $x_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)/3\right) + i\sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i\sin\frac{13\pi}{18}\right)$,
  $x_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right)/3\right) + i\sin\left(\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right)/3\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i\sin\frac{25\pi}{18}\right)$.

2. Alkalmazások

- Komplex számok fizikai alkalmazásai: váltóáramú körök leírása, rezgések és hullámok leírása, komplex idő- és amplitúdófüggvény, kvantummechanikai számítások.
- Vegyük a következő rekurzív sorozatot: $z_0 = 0$, $z_n = z_{n-1}^2 + c$. Azon c komplex számok, melyek esetén a sorozat korlátos a Mandelbrot-halmaz elemei, ami talán a legismertebb fraktálalakzat.
- Hogy rajzoljunk egy szabályos n-szöget a képernyőre? Rögzítsünk egy pontot, és a megadott képlettel számoljuk ki a rögzített pont által reprezentált komplex szám n-edik gyökeit (illetve csak azok közelítő értékeit). Így megkapjuk az n-szög összes csúcsát.
- Komplex számokkal működő Fourier-transzformációt használnak a képfeldolgozás különböző területein, például az arcfelismerésben, vagy a tömörítésben.
- A Wolfram Alpha ingyenes, internetes szoftverrel a komplex számokkal történő elemi számítások könnyen elvégezhető. A http://www.wolframalpha.com/ honlapon, vagy a

Wolfram Mathematica nevű offline programban `(10+4i)/((2-3i)*(-9-i))` formában lehet megadni komplex számokat és műveleteket. Szinte mindegyik komputeralgebrai szoftver képes a komplex számokat kezelni, például a Maple és a MatLab is.

ÍTÉLETKALKULUS

Logikai alapfogalmak, műveletek, formalizálás,
logikai ekvivalencia, teljes diszjunktív normálforma, tautológia.

1. Bevezető

A matematikai logikában az állításoknak nem a tényleges jelentésével, hanem a szerkezetével, igazságértékével és gondolatmenetének helyességével foglalkozunk. Mi ezen kurzus keretei között csak kétértékű logikával foglalkozunk (igaz-hamis), de többértékű logika is értelmezhető. Például vessünk egy pillantást a következő kijelentésekre.

(1) Ez a mondat hamis.
(2) Minden 2-nél nagyobb páros egész szám felírható két prímszám összegeként.
(3) Minden kétfejű ló piros.

Az első kijelentés ellentmondás, tehát nem lehet sem igaz, sem hamis, gondoljunk bele. A második egy híres sejtés, erről pedig egyszerűen nem tudjuk megmondani, hogy igaz-e, vagy hamis. A harmadik kijelentés pedig azért érdekes, mert a kétértékű logika szerint igaznak kellene lennie, mert a tagadása hamis (van olyan kétfejű ló, ami nem piros?), de ezt is úgy szoktuk elintézni, hogy logikai értéke eldönthetetlen. Többek között az informatikában alkalmazzák a szintén többértékű Fuzzy-logikát, amely nem csak a szokásos 0-1 értékeket veheti fel, hanem köztes értékeket is. Ezáltal az objektumok több csoportba sorolhatók, és a gépek jobban irányíthatók. Mi ilyenekkel nem foglalkozunk, helyette a matematikai logika legalapvetőbb részét nézzük át.

2. Ítéletkalkulus

1. Definíció. Az **ítélet** olyan állítás, amelynek igazságértéke van (igaz vagy hamis). Jelölésük: $A, B, C, \ldots$

Nem ítéletek a következők: felkiáltások, felszólítások, kérdő mondatok, ...

Hasonlóan, mint a hétköznapi nyelvben is, az ítéletek bizonyos módon összekapcsolhatók, és így új összetett ítéleteket kaphatunk. Nézzük meg milyen kapcsolatban állhatnak egymással az ítéletek, illetve pontosabban milyen művelettel kapcsolhatók össze az ítéletek?

2. Definíció. Ha A és B két ítélet, akkor értelmezzük az alábbi műveleteket.

- **Negáció**: $\neg A$
„nem A" - Így fejezzük ki a logikai kapcsolatot szavakkal.
C-ben, Java-ban: !
- **Konjunkció**: $A \wedge B$
„A és B": Nem minden „és" konjunkció, gondoljunk például a felsorolásra. Viszont „és" helyett állhat a „DE" szó, például „Szeretem a dimatot, de utálom a Kalkulust."
C-ben, Java-ban: &&
- **Diszjunkció**: $A \vee B$
„A vagy B": vagy A, vagy B, vagy mindkettő.
C-ben, Java-ban: ||
Fontos: NEM kizáró vagy! Ezen a kurzuson nincs kizáró vagy.
- **Implikáció**: $A \to B$
„Ha A, akkor B." „Csak akkor A, ha B." „A-ból következik B." „B-nek elegendő feltétele A." „A-nak szükséges feltétele B."
- **Ekvivalencia**: $A \leftrightarrow B$
„Akkor és csak akkor A, ha B." „Pontosan akkor A, ha B." „A-nak szükséges és elégséges feltétele B." „A ekvivalens B-vel."

Ha két állítást valamilyen művelettel összefűzünk, akkor a művelet igazságtartalma természetesen függ az eredetileg összekapcsolt ítéletekétől. A következő táblázatban megtalálhatjuk, hogyan.

2.1. Igazságtáblázatok

A	$\neg A$
i	h
h	i

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
i	i	i	i	i	i
i	h	h	i	h	h
h	i	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i

3. Példa. Vegyük a következő két állítást.

- „Ha $2 + 2 = 5$, akkor a Hold sajtból van."
- „Ha $2 + 2 = 5$, akkor Franciaország fővárosa Párizs."

Mindkét állítás igaz. Azért, mert implikációval vannak összekapcsolva, és az implikáció bal oldala hamis. Ekkor maga az állítás igaz. Természetesen az nem igaz, hogy sajtból van a Hold. De ezt nem állította a mondat.

2.2. Formalizálás

A formalizálás során az állításokból matematikai jelekből álló jelsorozatokat képzünk, a fenti műveleti jelek segítségével. Az állításokat a lehető legkisebb alapegységekre kell bontani, ezek a prímítéletek.

4. Definíció. A **prímítélet** olyan ítélet, amely nem tartalmaz logikai kötőszavakat.

Formalizálásnál fontos, hogy csakis **kizárólag prímítéletek helyett vezessünk be ítéletváltozókat**. FONTOS: A PRÍMÍTÉLET NEM TARTALMAZHAT TAGADÁST!

5. Definíció (Formula). Legyen $n \in \mathbb{N}$ és legyenek $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók, azaz olyan változók, amelyek ítéleteket jelölnek.

(1) Az ítéletváltozók mindegyike formula.
(2) Ha F és G formula, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ jelsorozatok mindegyike formula.
(3) Az ítéletkalkulus minden formulája megkapható a fenti 1. és 2. szabályok VÉGES sokszori alkalmazásával.

Ha jól megnézzük, akkor ez egy rekurzív definíció, ahol a rekurzió a prímítéleteknél áll meg. Informálisan a fenti definíció azt jelenti, hogy logikai műveletek segítségével, ítéletváltozókból és zárójelekből szintaktikailag helyes jelsorozatokat képzünk.
A logikai műveletek között is van precedenciasorrend: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Ezt zárójelezéssel ki lehet kerülni, és a kurzuson nem is fogjuk használni.
Nézzük meg, hogy működik a formalizálás egy konkrét példán keresztül.

6. Példa. „Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha zh-t írunk." Formalizálás:
Prímítéletek: A – esik az eső; B – rossz kedvem van; C – elmegyek dimat gyakorlatra; D – zh-t írunk.
Formalizálva: $(A \wedge (\neg B)) \to (C \leftrightarrow D)$. Precedenciákat alkalmazva: $A \wedge \neg B \to (C \leftrightarrow D)$.

Valamilyen szinten a formalizálás ellentéte a részformulákra bontás. Azaz megnézzük, hogy egy formula milyen kisebb formulákból áll elő.

7. Definíció. Legyen F és G logikai formula. Azt mondjuk, hogy G **részformulá**ja F-nek, ha G fellép F-nek a rekurzív definíció szerinti előállítása során.

8. Példa. Az előző példa összes részformulái a következők: A, B, $(\neg B)$, $(A \wedge (\neg B))$, C, D, $(C \leftrightarrow D)$, $(A \wedge (\neg B)) \to (C \leftrightarrow D)$.

2.3. Kiértékelés, logikai ekvivalencia

Ebben a fejezetben már el is felejthetjük, hogy egy adott formula akár jelenthet is valamit. A matematikai logikának az a lényege, hogy a formulák a jelentésük nélkül is vizsgálhatóak legyenek. Így például függetlenül mit jelent egy formulában az A változó, az biztos, hogy vagy igaz, vagy hamis.

9. Definíció. A **kiértékelés** az a művelet, amikor a változók helyére igaz vagy hamis értéket helyettesítünk. A kiértékelés végeredménye egy igazságérték.

10. Példa. Legyen adott a következő formula: $A \to ((\neg B) \vee C)$. Számoljuk ki a formula azon kiértékelését, melyben A és C igaz, B pedig hamis.

A	B	C	$(\neg B)$	$((\neg B) \vee C)$	$A \to ((\neg B) \vee C)$
i	h	i	$\neg h = i$	$(i \vee i) = i$	$i \to i = i$

Elképzelhető, hogy ugyanazt a jelentéstartalmat két különböző formulával is le tudjuk írni. Ezek a logikailag ekvivalens formulák.

11. Definíció. Az ítéletkalkulus F és G formulája **logikailag ekvivalens**, ha értékük bármely kiértékelésnél megegyezik. Jelölésben: $F \equiv G$.

Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy mindkét formulára felírjuk az igazságtáblázatot, és összenézzük a két formula összes kiértékelését, és ha mindegyik megegyezik, akkor ekvivalensek. Lehetséges, hogy egy nagyon hosszú logikai formulához található egy sokkal rövidebb formula, mellyel logikailag ekvivalens. Ekkor minden további nélkül áttérhetünk a rövidebb formula vizsgálatára.

12. Tétel. *Bármely A és B formulák esetén*

$$A \to B \equiv \neg A \vee B \quad \textit{és} \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A).$$

Az előző tételnek köszönhető, hogy az $\leftrightarrow$ és $\to$ jelek átírhatók a $\wedge, \vee, \neg$ jelek segítségével. Jogosan merül fel a kérdés, hogy akkor miért használjuk őket? (A C-ben és a JAVA-ban sincsenek beépítve.)

13. Példa. Ekvivalens-e a következő két formula: $F = \neg(A \to B)$, $G = A \wedge (\neg B)$.

A	B	$(A \to B)$	$F = \neg(A \to B)$	$(\neg B)$	$G = A \wedge (\neg B)$
i	i	i	h	h	$i \wedge h = h$
i	h	h	i	i	$i \wedge i = i$
h	i	i	h	h	$h \wedge h = h$
h	h	i	h	i	$h \wedge i = h$

Mivel az F oszlopa és G oszlopa minden sorban megegyező értéket vesz fel, ezért logikailag ekvivalensek.

14. Példa. Az utolsó oldalon összegyűjtöttük a legfontosabb ekvivalenciákat, amelyek mindegyike bizonyítható az előző példában mutatott módon. Nem kell mindegyiket fejből tudni, de mindegyikről elvárt az igazolása.

2.4. Diszjunktív normálforma

A 12. Tétel használatával bármely formulából ki tudjuk küszöbölni az ekvivalencia és implikáció jeleket. Ebben a fejezetben egy olyan speciális formulatípusról lesz szó, mely mind matematikailag, mind informatikailag könnyen vizsgálható. (A számítógép nem rendelkezik beépített ekvivalencia és implikáció jelekkel, így hasznos lenne algoritmus, mellyel ezek kiküszöbölhetők egy formulából.)

15. Definíció. Egy formula **diszjunktív normálforma**, ha $P_1 \vee \ldots \vee P_k$ alakú, ahol minden P_i ítéletváltozók és negáltjaik konjunkciója oly módon, hogy mindegyik változó minden P_i-ben legfeljebb 1-szer szerepel.

16. Definíció. Ha egy n-változós diszjunktív normálforma minden P_i-jében mind az n darab változó szerepel, akkor **teljes diszjunktív normálformá**ról beszélünk.

A definícióknál sokkal érthetőbben be lehet mutatni példán keresztül.

17. Példa. A következő formulák diszjunktív normálformák:

- $(\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3)$ – ha az ítéletváltozók A_1, A_2, A_3 akkor ez még teljes is ($k = 2$, $n \geq 3$).
- $A_1 \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$ – ez nyilván nem teljes ($k = 2$, $n \geq 2$).
- $A_1 \vee A_2$ – ez sem teljes ($k = 2$, $n \geq 2$).
- $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3$ – ha az ítéletváltozók A_1, A_2, A_3 akkor ez még teljes is ($k = 1$, $n \geq 3$).

18. Tétel. *Tetszőleges F formulához létezik olyan teljes diszjunktív normálforma, amely F-fel logikailag ekvivalens.*

Ez egy nagyon fontos tétel, azonban semmit nem mond arról, hogyan keressük meg ezt a teljes diszjunktív normálformát. A módszer a következő.

(1) Felírjuk F igazságtáblázatát.
(2) A definícióban szereplő P_i-k azon sorokat reprezentálják, ahol F logikai értéke igaz.
(3) Minden sorhoz a megfelelő P_i-t úgy kapjuk, hogy azon változókat negáljuk, ahol hamis érték szerepel, és vesszük az összes változót tartalmazó konjunkciót.

19. Példa. Írjuk fel az $(A \vee B) \to (\neg A)$ formula teljes diszjunktív normálformáját.

A	B	$(A \vee B)$	$(\neg A)$	$(A \vee B) \to (\neg A)$	
i	i	i	h	$i \to h = h$	
i	h	i	h	$i \to h = h$	
h	i	i	i	$i \to i = i$	$\Leftarrow$
h	h	h	i	$h \to i = i$	$\Leftarrow$

$$(A \vee B) \to (\neg A) \equiv (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Természetesen az is egy módszer, hogy a $\to$ és $\leftrightarrow$ jeleket egyesével átírjuk, azután az így kapott formulát megpróbáljuk a megfelelő formára pofozni az ismert ekvivalenciák segítségével. Ez szebb az előbb említett módszernél, viszont az előző talán algoritmikusabb.

2.5. Tautológia

Ebben a fejezetben egy speciális formuláról lesz szó. Alapvetően egy formula bonyolultságát nem feltétlen a hosszával tudjuk mérni, mert előfordulhat, hogy egy sokkal rövidebbel ekvivalens. Sőt az is előfordulhat, hogy minden kiértékelésre egyforma.

20. Definíció. Egy formula **tautológia**, ha minden kiértékelésre igaz.

A definíció szerint könnyen ellenőrizhető, hogy egy formula tautológia-e, csak fel kell írni az igazságtáblázatát, és megnézni, hogy a végén mindenhol igaz érték jön-e ki.

21. Példa. Nézzük meg, hogy az $(A \wedge (A \to B)) \to B$ formula tautológia-e.

A	B	$(A \to B)$	$(A \wedge (A \to B))$	$(A \wedge (A \to B)) \to B$
i	i	i	$i \wedge i = i$	$i \to i = i$
i	h	h	$i \wedge h = h$	$h \to h = i$
h	i	i	$h \wedge i = h$	$h \to i = i$
h	h	i	$h \wedge i = h$	$h \to h = i$

Minden kiértékelésre igaz a formula, tehát $(A \wedge (A \to B)) \to B$ tautológia.

Tautológiagyűjtemény

(I) $\to$, $\leftrightarrow$ kifejezése a többi művelettel:

(1) $$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A),$$

(2) $$A \to B \equiv (\neg A) \vee B.$$

(II) $\wedge$, $\vee$ alaptulajdonságai:

(3) $A \wedge A \equiv A,$ $\quad A \vee A \equiv A,$ (idempotencia)

(4) $A \wedge B \equiv B \wedge A,$ $\quad A \vee B \equiv B \vee A,$ (kommutativitás)

(5) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C),$ $\quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C),$ (asszociativitás)

(6) $(A \vee B) \wedge A \equiv A,$ $\quad (A \wedge B) \vee A \equiv A,$ (abszorptivitás)

(7) $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C),$ $\quad (A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C).$ (disztributivitás)

(III) $\wedge$, $\vee$, $\neg$ közötti összefüggések:

(8) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B),$ $\quad \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B),$ (De Morgan szabályok)

(9) $\neg(\neg A) \equiv A,$

(10) $A \wedge (\neg A) \equiv B \wedge (\neg B),$ $\quad A \vee (\neg A) \equiv B \vee (\neg B),$

(11) $A \wedge \big(B \vee (\neg B)\big) \equiv A,$ $\quad A \vee \big(B \vee (\neg B)\big) \equiv B \vee (\neg B),$

(12) $A \wedge \big(B \wedge (\neg B)\big) \equiv B \wedge (\neg B),$ $\quad A \vee \big(B \wedge (\neg B)\big) \equiv A.$

(IV) $\to$-t és $\leftrightarrow$-t tartalmazó logikai ekvivalenciák:

(13) $A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A,$ (kommutativitás)

(14) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C),$ (asszociativitás)

(15) $A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A),$

(16) $(A \to C) \wedge (B \to C) \equiv (A \vee B) \to C,$

(17) $(A \to B) \wedge (A \to C) \equiv A \to (B \wedge C),$

(18) $A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C,$

(19) $A \to \big(B \wedge (\neg B)\big) \equiv \neg A.$

(V) Tautológiák:

(20) $$A \to A \; \big(\equiv A \vee (\neg A)\big),$$

(21) $$\big(A \wedge (A \to B)\big) \to B,$$

(22) $$\big((\neg B) \wedge (A \to B)\big) \to (\neg A),$$

(23) $$\big((\neg A) \wedge (A \vee B)\big) \to B,$$

(24) $$A \to \big(B \to (A \wedge B)\big),$$

(25) $$(A \wedge B) \to A,$$

(26) $$A \to (A \vee B),$$

(27) $$\big((A \to B) \wedge (B \to C)\big) \to (A \to C),$$

(28) $$(A \to B) \to \big((B \to C) \to (A \to C)\big),$$

(29) $$(A \to B) \to \big((A \wedge C) \to (B \wedge C)\big),$$

(30) $$(A \to B) \to \big((A \vee C) \to (B \vee C)\big),$$

(31) $$\big((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)\big) \to (A \leftrightarrow C),$$

továbbá

(32) $$(A \leftrightarrow B) \to \big((A * C) \leftrightarrow (B * C)\big),$$

(33) $$(A \leftrightarrow B) \to \big((C * A) \leftrightarrow (C * B)\big),$$

ahol $*$ a $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ logikai műveletek bármelyike lehet.

Az (V) tautológiák, valamint az egyes $F \equiv G$ alapvető logikai ekvivalenciákból származtatott $F \leftrightarrow G$, $F \to G$ és $G \to F$ alakú tautológiák összességét nevezzük tautológiagyűjteménynek.

Predikátumkalkulus

Predikátumkalkulus alapfogalmai, formalizálás,
tagadás, logikailag igaz formulák.

1. Bevezető

Vizsgáljuk meg a következő két kijelentést.

- Minden almához tartozik egy fa, amiről leesett.
- Bármely két racionális szám között van irracionális szám.

Az eddig tanult ítéletkalkulusbeli lehetőségek szerint ezek prímítéletek lennének, de érezzük rajtuk, hogy több információt hordoznak. Ezen probléma kiküszöbölése miatt ismerkedjünk meg a predikátumkalkulussal. A predikátumkalkulust az ítéletkalkulus kiegészítésének is tekinthetjük. A predikátumkalkulus eszközeivel az állítások precízebben formalizálhatók, logikailag jobban vizsgálhatók.

2. Predikátumkalkulus, formalizálás

1. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus szimbólumai**:

- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$ és a „vessző”;
- $\exists$, azaz **egzisztenciális kvantor**: „létezik”, „van olyan”, „található”, „néhány”, „bizonyos”, „valamely”, ...;
- $\forall$, azaz **univerzális kvantor**: „bármely”, „minden”, „tetszőleges”, „az összes”, ...;
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ **individuumváltozók**, ezekre mint vizsgálandó objektumegyedekre kell gondolni, ezen individuumváltozók halmaza az individuumtartomány;
- **predikátumjelek** nemüres halmaza: a predikátum olyan függvény, amely individuumváltozókból logikai állítást készít;
- **függvényjelek** (esetleg üres) halmaza: olyan függvényekre kell gondolni, amely több objektumból egy új objektumot készít, azaz ezek szolgálnak a műveletek kifejezésére.

2. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus kifejezései** az alábbi rekurzió szabályai szerint megadható jelsorozatok.

- Az x_i individuumváltozók és individuumkonstansok önmagukban kifejezések;
- ha $k_1, \ldots, k_n$ kifejezések, akkor bármely f függvényjelre $f(k_1, \ldots, k_n)$ is kifejezés, ha az f függvény n-változós;

- az elsőrendű predikátumkalkulus minden kifejezése előáll az előző két szabály véges sokszori alkalmazásával.

3. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus atomi formulái** a $P(k_1, \ldots, k_n)$ alakú jelsorozatok, ahol P egy n-változós predikátumjel, $k_1, \ldots, k_n$ pedig kifejezések.

4. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus formulái**

- az atomi formulák;
- ha F és G formulák, akkor $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $(F \rightarrow G)$, $(\neg F)$ is formulák;
- ha F formula és x_i individuumváltozó, akkor $(\forall x_i)\, F$ és $(\exists x_i)\, F$ is formula;
- az elsőrendű predikátumkalkulus minden formulája előáll az előző három szabály véges sokszori alkalmazásával.

FONTOS: a kvantor mindig az utána álló legrövidebb részformulára vonatkozik!
Most már megvannak a formalizáláshoz szükséges eszközeink és szabályaink. Lássunk néhány példát.

5. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Minden strucc madár."

- Legyen $U = \{\text{állatok}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjelek: $S(x)$: „x strucc", $M(x)$: „x madár".
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(S(x) \rightarrow M(x))$.

Mint a fenti példában is látható, egy predikátumjel egy adott objektumból állítást készít.

6. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Minden strucc madár."

- Legyen $U = \{\text{struccok}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjel: $M(x)$: „x madár".
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(M(x))$.

Az előző két példa rávilágít arra, hogy fontos hogyan választjuk meg az individuumtartományt. Az első könnyebben bővíthető, például új predikátum jelek bevezetésével könnyen formalizálható a „Minden hal vízben él." mondat, míg a második individuumtartomány nem engedi meg az állítás formalizálását. Konkrét feladatoknál általában az individuumtartomány és a predikátumjelek előre adottak, ha nem, akkor szabadon megválaszthatóak. A valós életben ez mindig modellfüggő.

7. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Minden szentnek maga felé hajlik a keze.”

- Legyen $U = \{\text{emberek}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjel: $Sz(x)$: „x szent”, $H(x, y)$: „x-nek y felé hajlik a keze”.
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(Sz(x) \to H(x, x))\,.$

8. Példa. Formalizáljuk az alábbi mondatot: „Ha egy gyerek kék szemű, akkor az édesapja is kék szemű.”

- Legyen $U = \{\text{emberek}\}$ az individuumtartomány; az elemei azok az objektumok, melyekkel az állításban foglalkozunk.
- Predikátumjel: $G(x)$: „x gyerek”, $K(x)$: „x kék szemű”.
- Függvényjel: $a(x)$: „x édesapja”.
- Formalizált állítás: $(\forall x)\,(G(x) \to (K(x) \to K(a(x))))\,.$

3. Tagadás

Gyakran van szükségünk arra, hogy pontosan megfogalmazzuk egy állítás tagadását. Állítások tagadására van szükség például kontrapozíciós, indirekt bizonyítások és elemi logikai átgondolások során is. Ha ismerjük egy állítás tagadásának logikai értékét, akkor az eredeti állításét is tudjuk, és néha könnyebb vizsgálni egy állítás tagadását. Vizsgáljuk meg, hogy miként tudjuk egy predikátumkalkulusbeli állítás tagadását felírni pusztán az állítás formulájából. Ezt két tétel alkalmazásával végezhetjük el.

9. Tétel. *Predikátumkalkulusban teljesül az alábbi két logikai ekvivalencia:*

$$\begin{aligned}\neg\,((\forall x)\,F) &\equiv (\exists x)\,(\neg F)\,,\\ \neg\,((\exists x)\,F) &\equiv (\forall x)\,(\neg F)\,.\end{aligned}$$

10. Tétel. *Tetszőleges A és B formula esetén teljesülnek az alábbi ekvivalenciák:*

- $\neg\,(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$
- $\neg\,(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$
- $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$
- $\neg\,(A \to B) \equiv A \wedge (\neg B)$
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

Az előző két tétel egy szabályt ad a tagadásra. Mindig részformulánként kell tagadni, és ha a negációjel egy kvantorral találkozik, akkor a kvantor megváltozik, és a tagadás a részformulában beljebb csúszik.

11. Példa. Formalizáljuk az alábbi állítás tagadását: „Minden strucc madár.”

- Az állítást már formalizáltuk egy korábbi példában: $(\forall x)\,(S(x) \to M(x))$.
- Tagadjuk a formulát:

$$\neg\,(\forall x)\,(S(x) \to M(x)) \equiv (\exists x)\,(\neg\,(S(x) \to M(x))) \equiv (\exists x)\,(S(x) \wedge (\neg M(x))).$$

- Ha jelentéstartalmilag tagadjuk az állítást, akkor azt kell formalizálni, hogy „Létezik olyan strucc, ami nem madár.” Ez pontosan az előbb kapott negált formulával formalizálható.

Az előbbi példa rámutat arra, hogy egy állítást kétféleképpen is lehet tagadni. Megalkothatjuk a tagadásnak megfelelő állítást, és azt formalizálhatjuk, vagy az eredeti állítást formalizáljuk, és azt tagadjuk a szabályok szerint. Logikailag ekvivalens formulákat kell kapnunk.

12. Példa. Adjuk meg a következő formula negáltját.

$$(\forall x)\,((\neg P(x)) \wedge (\exists y)\,(Q(x,y) \to R(y)))$$

$$\begin{aligned}
\neg\,(\forall x)\,((\neg P(x)) \wedge (\exists y)\,(Q(x,y) \to R(y))) &\equiv (\exists x)\,(\neg\,((\neg P(x)) \wedge (\exists y)\,(Q(x,y) \to R(y))))\\
&\equiv (\exists x)\,(\neg\,(\neg P(x)) \vee (\neg\,(\exists y)\,(Q(x,y) \to R(y))))\\
&\equiv (\exists x)\,(P(x) \vee ((\forall y)\,(\neg\,(Q(x,y) \to R(y)))))\\
&\equiv (\exists x)\,(P(x) \vee ((\forall y)\,(Q(x,y) \wedge (\neg R(y)))))
\end{aligned}$$

4. Logikailag igaz formulák (tautológiák)

Az ítéletkalkulusbeli formuláktól eltérően nincs általános algoritmus arra, hogy egy predikátumkalkulusbeli formuláról eldöntsük azt, hogy tautológia-e. Sőt, már a tautológia fogalma sem definiálható olyan könnyen, mint az ítéletkalkulus esetén.

13. Definíció. Az elsőrendű **predikátumkalkulus interpretációjá**hoz a következő lépéseket kell véghezvinni.

(1) Választunk egy nemüres A halmazt, ez lesz az interpretációs tartomány.
(2) Minden P predikátumjelhez hozzárendelünk egy A-n értelmezett ugyanannyi változós predikátumot.
(3) Minden f függvényjelhez hozzárendelünk egy A-n értelmezett ugyanannyi változós függvényt.

Az előző definíció tulajdonképpen arról szól, hogy egy adott formulának értelmet adunk, azaz egy karaktersorozat helyett már egy konkrét állítás formalizálásaként tekintünk rá. Technikailag bármely $a = (a_1, a_2, \ldots)\,, a_1, a_2, \ldots \in A$ sorozat esetén az a_i-t a formulában x_i helyére beírva el tudjuk dönteni, hogy a formula igaz-e vagy sem, az adott interpretáció esetén.

14. Definíció. Egy predikátumkalkulusbeli formula **tautológia**, azaz logikailag igaz formula, ha bármely interpretációja esetén tetszőleges $a = (a_1, a_2, \ldots), a_1, a_2, \ldots \in A$ sorozatra az x_i-k helyére a_i-ket írva logikailag igaz értéket kapunk.

Még egyszer fontos kihangsúlyozni, hogy predikátumkalkulus esetén nincs algoritmus, amivel el tudnánk dönteni egy formuláról, hogy tautológia-e, eltérően az ítéletkalkulustól. Függetlenül ettől néhány egyszerű feladatot azért mi is meg tudunk oldani.

15. Példa. Tautológia-e az alábbi formula?

$$(\exists x)\,(P(x)) \to (\forall x)\,(P(x))$$

Megoldás: nem. Ha intuíció alapján akarjuk indokolni a dolgot, akkor csak annyi az egész, hogy ha létezik olyan objektum, amire valami teljesül, az nem jelenti azt, hogy minden objektumra teljesül. Nagyon egyszerűen meg tudjuk adni a formális választ is: legyen az interpretációs tartomány a természetes számok halmaza, és $P(x)$ jelentse azt, hogy x prím. Ekkor egy $i \to h$ implikációt kapunk, melynek értéke hamis. Találtunk egy interpretációt, mely esetén a formula hamis, ezért nem tautológia.

16. Példa. Tautológia-e az alábbi formula?

$$(\neg\,(\exists x)\,(\forall x)\,(\neg A(x) \vee \neg B(y))) \leftrightarrow (\forall x)\,(\exists y)\,(A(x) \wedge B(y))$$

Megoldás: a formula tautológia, mert az $\leftrightarrow$ jel bal és jobb oldalán álló formula egymással ekvivalens, a jobb oldali adja meg mi lesz akkor, ha a bal oldaliban a negációjelet beljebb visszük a formulában. Ha az $\leftrightarrow$ két oldalán ekvivalens formulák állnak, akkor az tautológia, mint ahogy ezt már ítéletkalkulusból tanultuk.

17. Példa. Tautológia-e az alábbi formula?

$$(\exists x)\,(B(x, y) \to x = y) \leftrightarrow (\forall x)\,(\neg\,(B(x, y) \to x = y))$$

Megoldás: megsejtjük, hogy a formula nem tautológia, ezért keresünk olyan interpretációt, melynél van olyan kiértékelés, amelynél hamis értéket kapunk. (Megsejthetjük például úgy, hogy észrevesszük, hogy az ekvivalenciajel jobb oldalán álló formula pontosan a bal oldali tagadása.) Legyen A egy tetszőleges legalább kételemű interpretációs tartomány, B pedig az azonosan hamis predikátum. Ekkor a bal oldal azt mondja, hogy létezik egy olyan objektum, amely ha B-kapcsolatban áll y-nal, akkor $x = y$. Viszont B azonosan hamis, ezért az implikáció mindig igaz, így a bal oldal annyit mond, hogy létezik olyan objektum, melyre igaz. Szándékosan ért véget az előző mondat. Hasonlóan látható, hogy a jobb oldal azt mondja, hogy bármely objektum esetén hamis. Ha létezik egy objektum, amelyre igaz, akkor ebből nem következhet az, hogy minden objektumra hamis. Így ezen interpretáció esetén bármely „kiértékelés” esetén hamis értéket kapunk.

Előfordulhatnak olyan feladatok, melyekben a következő egyszerű ekvivalenciák ismerete is segíthet.

18. Tétel. *Tetszőleges F és G formula esetén*

- $(\forall x)\,(\forall y)\,F \equiv (\forall y)\,(\forall x)\,F$,
- $(\exists x)\,(\exists y)\,F \equiv (\exists y)\,(\exists x)\,F$,
- $(\forall x)\,F \equiv \neg\,(\exists x)\,(\neg F)\,$,
- $(\exists x)\,F \equiv \neg\,(\forall x)\,(\neg F)\,$,
- $(\forall x)\,(F \wedge G) \equiv (\forall x)\,F \wedge (\forall x)\,G$,
- $(\exists x)\,(F \vee G) \equiv (\exists x)\,F \vee (\exists x)\,G$.

5. Informatikai vonatkozások

- Bonyolultságelmélet kurzus: polinomiális hierarchia, földrajzi játék, kvantifikált Boole-formula, $\mathcal{PSPACE}$ problémák.
- Logika és informatikai alkalmazásai kurzus:
  - Az ítéletlogika és predikátumlogika kiterjesztése másodrendű logikára.
  - Logikai programozás és PROLOG nyelv (levezetések).
  - Helyesség, teljesség, eldönthetőség (lásd Bonyolultságelmélet kurzus).
- Bizonyítás elmélet.
- Modell elmélet.
- Rezolúciós kalkulus, automatikus tételbizonyítás.
- Mesterséges intelligencia.
- Számítógépes nyelvészet, például beszédfelismerés.

Mátrixok

Mátrixok. Mátrixműveletek és tulajdonságaik. Sajátérték, sajátvektor.

Ebben a részben a matematika olyan részét tárgyaljuk, melynek először nem látszik, hogy mi haszna lehet. Elég számolásigényes, de legalább könnyen algoritmizálhatóak ezek a számolások. A kurzus kereteibe sajnos nem fér bele, hogy ezek a matematikai objektumok hogyan segítenek (főleg egy informatikusnak) problémákat modellezni, de próbáljuk meg elfogadni, hogy a sok számolás mögött értelem és alkalmazás is van.

1. Mátrixok

1. Definíció. Az M-mel jelölt $m \times n$-es **mátrix** egy T test elemeiből (a mi esetünkben ez valós számokat jelent) álló táblázat, m darab sorral és n darab oszloppal. Az ilyen paraméterekkel rendelkező mátrixot $M_{m \times n}$-nel jelöljük. Az M mátrix i-edik sorának j-edik elemét m_{ij}-vel jelöljük.

Talán ezt a fogalmat úgy ismeri mindenki a programozás kurzusról, hogy kétdimenziós tömb. Ugyanarról van szó.

2. Példa. Legyen M az alábbi mátrix:

$$M_{3\times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} & 0.75 \\ \pi & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 6 & -7.2 & 9\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Ekkor például $m_{13} = \sqrt{2}$.

Van két speciális mátrix, melyet mérettől függetlenül mindig ugyanúgy nevezünk.

3. Definíció. Az $(n \times n)$-es **egységmátrix** olyan mátrix, amelynek a főátlója 1-eket tartalmaz, a többi eleme, pedig nulla:

$$I_n = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Az $(n \times n)$-es **nullmátrix** olyan mátrix, amely csak nulla elemeket tartalmaz:

$$Z_n = O_n = \mathbb{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Mátrixműveletek

Már többször találkoztunk azzal a jelenséggel, hogy új objektumot definiáltunk. Most is ez történt, tehát azt is definiálni kell, hogyan tudunk velük dolgozni.

4. Definíció (**Mátrixok összeadása és skalárral szorzása**)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ és $B = (b_{ij})_{m\times n}$ két T számtest feletti $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \text{ és } cA = (ca_{ij})_{m\times n}.$$

Az előző definíció virágnyelven azt jelenti, hogy csak két azonos méretű mátrixot tudunk összeadni, és ez az összeadás pozíciónkénti összeadást jelent.

5. *Megjegyzés.* Csak azonos méretű mátrixokat lehet összeadni, különböző méretűeket sosem.

6. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 9 & 2 \\ -1 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -4 \\ -8 & 10 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \end{pmatrix}, \qquad (-2) \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \\ -4 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

7. Definíció (**Mátrixok szorzása**)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ és $B = (b_{ij})_{n\times k}$ két T számtest feletti mátrix. Ekkor

$$AB = \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \right)_{m\times k}.$$

A fenti szummás képletet szövegesen is elmagyarázzuk. Egy $(m\times n)$-es és egy $(n\times k)$-s mátrix szorzata $(m \times k)$-s méretű. Továbbá a szorzat i-edik sorának j-edig eleme $\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$, azaz az A mátrix i-edik sorának és a B mátrix j-edik oszlopának skaláris szorzata.

8. *Megjegyzés.* Két mátrix csak akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak száma megegyezik a második mátrix sorainak számával.

9. *Megjegyzés.* Az AB szorzat általában nem egyezik meg a BA szorzattal, sőt még lehet, hogy a méretük miatt valamelyik nincs is értelmezve.

10. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Az AB mátrix (2×2)-es méretű lesz. A számolást végezzük úgy hogy az A megfelelő sorvektorait szorozzuk össze skalárisan B megfelelő oszlopvektorával. A skaláris szorzás a következőt jelenti:

$$\langle (a, b, c, d), (e, f, g, h) \rangle = ae + bf + cg + dh.$$

Tehát AB megkapható az alábbi módon:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle(2,-3,5),(6,2,-3)\rangle & \langle(2,-3,5),(-1,-2,0)\rangle \\ \langle(1,0,8),(6,2,-3)\rangle & \langle(1,0,8),(-1,-2,0)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12-6-15 & -2+6+0 \\ 6+0-24 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

11. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -9 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \\ -5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \langle(5,4,-2),(-1,0,-5)\rangle & \langle(5,4,-2),(-2,8,7)\rangle & \langle(5,4,-2),(3,3,9)\rangle \\ \langle(-9,4,6),(-1,0,-5)\rangle & \langle(-9,4,6),(-2,8,7)\rangle & \langle(-9,4,6),(3,3,9)\rangle \\ \langle(3,1,-2),(-1,0,-5)\rangle & \langle(3,1,-2),(-2,8,7)\rangle & \langle(3,1,-2),(3,3,9)\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5+0+10 & -10+32-14 & 15+12-18 \\ 9+0-30 & 18+32+42 & -27+12+54 \\ -3+0+10 & -6+8-14 & 9+3-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 9 \\ -21 & 92 & 39 \\ 7 & -12 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12. Definíció (**Transzponálás**)**.** Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ egy T számtest feletti $(m \times n)$-es mátrix. Ekkor A^T egy $(n \times m)$-es mátrix, melynek egy tetszőleges eleme a következőképpen számítható ki:

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji}.$$

Ez azt jelenti, hogy a mátrix sorait felcseréljük az oszlopaival, vagy másképpen fogalmazva tükrözzük a mátrixot a „főátlóra”. (Igazi főátlóról csak négyzetes mátrixok esetében szoktunk beszélni.)

13. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \; B^T = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 7 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \; C^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

Ugyanúgy, mint számoknál, a mátrixoknál is vannak a műveleteknek bizonyos tulajdonságai. Némelyik öröklődik a számoknál lévőkből, némelyeket a definíció alapján kell igazolni.

14. Tétel (Műveletek tulajdonságai.)**.** *Legyenek A, B, C egy tetszőleges T test feletti mátrixok, és $c, d \in T$ skalárok. Ekkor*

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(c + d)A = cA + dA$
- $c(A + B) = cA + cB$
- $c(AB) = (cA)B$
- $\left(A^T\right)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c\left(A^T\right)$

ha a megfelelő műveletek elvégezhetőek. (Ha az egyenlőség valamelyik oldalát nem lehet elvégezni, akkor semmi értelme egyenlőségről beszélni.)

3. Sajátérték

15. Definíció. Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. Ha $xA = \lambda x$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra és valamely nemnulla $x \in T^{1\times n}$ sorvektorra, akkor λ-t az A mátrix **sajátérték**ének, az x vektort pedig az A mátrix λ-hoz tartozó **baloldali sajátvektor**nak nevezzük.

16. Definíció. Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix. Ha $Ax = \lambda x$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra és valamely nemnulla $x \in T^{n\times 1}$ oszlopvektorra, akkor λ-t az A mátrix **sajátérték**ének, az x vektort pedig az A mátrix λ-hoz tartozó **jobboldali sajátvektor**nak nevezzük.

17. Definíció. Legyen A egy $(n \times n)$-es mátrix, és λ egy sajátértéke A-nak. Ekkor a λ-hoz tartozó bal- és jobboldali sajátvektorok halmazát a nullvektorral kiegészítve **bal-** illetve **jobboldali sajátaltér**nek nevezzük.

18. Definíció. Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. A

$$\chi_A(x) = (-1)^n \cdot \det\left(A - x \cdot E_n\right)$$

polinomot az A mátrix **karakterisztikus polinom**jának nevezzük.

19. Tétel. *Legyen A egy T számtest feletti $(n \times n)$-es mátrix. Ekkor az A mátrix sajátértékei pontosan a $\chi_A(x)$ karakterisztikus polinom gyökei.*

20. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 9 - x & 4 \\ 3 & 5 - x \end{vmatrix} = (9-x)(5-x)-12 = x^2-14x+33,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyökei: } x_1 = 3,\ x_2 = 11.$$

Így a mátrixnak két különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 11$.

21. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} = (1-x)(5-x)+4 = x^2-6x+9,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x = 3.$$

Így a mátrixnak egy darab valós sajátértéke van: $\lambda = 3$.

22. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (1-x)(3-x)+2 = x^2-4x+5,$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2-i,\ x_2 = 2+i.$$

Így a mátrixnak nincs sajátértéke, ha a valós számok teste fölött dolgozunk, viszont a komplex számok teste esetén két gyök van, így az A mátrixnak két különböző komplex sajátértéke van: $\lambda_1 = 2-i$ és $\lambda_2 = 2+i$.

23. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 8-x & 5 & 9 \\ 0 & -9-x & -1 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (8-x)(-9-x)(5-x)$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 8,\ x_2 = -9,\ x_3 = 5.$$

Így a mátrixnak három különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -9$ és $\lambda_3 = 5$.

24. Példa. Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit.

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1-(1-x)^2 & 1+(1-x) \\ 1 & 1-x & -1 \\ 0 & 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} \\
&= (-1)\begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 2-x \\ 2x-3 & 2-x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} -1-(1-x)^2 & 1 \\ 2x-3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)(-1-1+2x-x^2-2x+3) = (x-2)(1-x^2)
\end{aligned}$$

$$\chi_A(x) \text{ gyöke: } x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Így a mátrixnak három különböző valós sajátértéke van: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ és $\lambda_3 = -1$.

4. Inverz

25. Definíció. Egy A négyzetes mátrix **inverz**ének nevezzük azt az A^{-1}-gyel jelölt mátrixot, melyre $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, ahol I a megfelelő méretű egységmátrix. (A definíció alapján egyértelmű, hogy az inverz mérete megegyezik az eredeti mátrix méretével.)

A definíció azonban semmit nem mond arról, hogy milyen mátrixoknak van inverze, és ha van, akkor hogyan számolhatjuk ki. A következőkben két kiszámítási módot fogunk ismertetni.

4.1. Tétel szerinti kiszámítás

26. Definíció. Egy $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrix a_{ij} eleméhez tartozó **adjungált aldetermináns**t A_{ij}-vel jelöljük és az

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

képlettel számítjuk ki, ahol D_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó **aldetermináns**, vagyis annak a mátrixnak a determinánsa, melyet úgy kapunk, hogy az A mátrixból elhagyjuk az i-edik sorát és j-edik oszlopát.

27. Tétel. *Tetszőleges $A = (a_{ij})_{n\times n}$ négyzetes mátrixnak akkor és csak akkor van inverze, ha* $\det(A) \neq 0$. *Ha van inverze, akkor pontosan egy van, és erre érvényes az alábbi képlet:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(A_{ji}\right)_{n\times n}.$$

28. Példa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\det(A) = 3 + 4 - 2 - 4 = 1$$

$$A_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \quad A_{12} = (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1,$$
$$A_{13} = (-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1, \quad A_{21} = (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4-4) = 0,$$
$$A_{22} = (-1)^{(2+2)} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2, \quad A_{23} = (-1)^{(2+3)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1,$$
$$A_{31} = (-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1, \quad A_{32} = (-1)^{(3+2)} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2,$$
$$A_{33} = (-1)^{(3+3)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.2. Gauss–Jordan-elemináció

29. Definíció. Egy adott M mátrix esetén a **sorvektorrendszer elemi átalakításai**n az alábbiakat értjük:

- két sor cseréje,
- egy sor megszorzása egy nemnulla konstanssal,
- egyik sor konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz.

30. Tétel. *Ha A egy $n \times n$-es négyzetes mátrix, I pedig az $n \times n$-es egységmátrix, akkor tekintsük a $B = (A \mid I)$ mátrixot. Az A mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha a sorvektorrendszer elemi átalakításainak sorozatával a B mátrix $(I \mid C)$ alakra hozható. Ekkor $A^{-1} = C$.*

31. Példa. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = ?$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(3)}{\rightsquigarrow}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(4)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{(5)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$
$$\overset{(6)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{(7)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 1. és 2. sor cseréje.
(2) 3. sorból kivonom az 1.-t.

(3) 1. sorból kivonom a 2.-at.
(4) 3. sorból kivonom az 2.-at.
(5) 3. sor megszorzása (-1)-gyel.
(6) 1. sorból kivonom a 3.-at.
(7) 2. sorhoz hozzáadom a 3. sor (-2)-szeresét.

32. *Megjegyzés.* Hasonlóan a determináns kiszámításához nagyobb méretű mátrixok esetén itt is a Gauss–Jordan-elimináció sokkal gyorsabb, mint a tétel szerinti aldeterminánsos módszer.

5. Informatikai alkalmazások

- A különböző geometriai transzformációk tulajdonképpen lineáris leképezésnek tekinthetők, és kifejezhetők egy alkalmas mátrixszal történő szorzás segítségével. Például tükrözzük az $(a; b)$ pontot az y tengelyre. Ekkor a kapott vektor $(-a, b)$. Ha jól megnézzük, könnyen megtaláljuk az y tengelyre való tükrözés mátrixát:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mert } (-a; b) = (a; b) \cdot A.$$
Ilyen mátrixok megadhatók tükrözésekre, forgatásokra, vetítésekre, akár több dimenzióban is. LÁSD: Diszkrét matematika III. és Számítógépes grafika tantárgyakból.
- A gráfok egyértelműen kódolhatók szomszédsági és pont-él illeszkedési mátrixukkal. Mivel a mátrix szinte minden programnyelvben jól kezelhető egy 2-dimenziós tömbként, így ennek a kódolásnak is vannak előnyei. A gráfok az informatika több területén is előkerülnek, akár programozási algoritmus, akár hardverszinten, például beszélhetünk erőforrásgráfról, vagy a számítógép-hálózat is felfogható egy (irányított) gráfként.
- Képzeljünk el egy épületet, ahol különböző helyiségekbe különböző embereknek van belépési jogosultságuk. Ez nagyon jól kódolható egy mátrixszal: sorok=emberek, oszlopok=ajtók, és a megfelelő pozícióban 1-es van, ha az adott embernek van belépési jogosultsága, 0, ha nincs.
- Lineáris egyenletrendszer esetén elég az egyenletrendszer bővített mátrixával dolgozni. Sokszor kell megoldani lineáris egyenletrendszert, és érdekes kérdések merülnek fel a numerikus precizitás és a számolás időigénye kapcsán, LÁSD: Közelítő és szimbolikus számítások.
- Kódoláselméletben bizonyos kódok esetében a kódolás és a dekódolás is egy-egy mátrixszorzással kivitelezhető. Ide kapcsolódik a generátormátrix és a paritás-ellenőrző mátrix fogalma is, LÁSD: Diszkrét matematika III.

Determinánsok

Determináns kiszámítási módjai,
tulajdonságai és alkalmazásai.

1. Determináns

A determináns fogalmának kiépítése többféleképpen is megtörténhet. Van, aki a determináns egy külön objektumnak tekinti. Mi jobban szeretjük a determinánst úgy interpretálni, hogy ez egy leképezés, ami négyzetes mátrixokhoz rendel számot. Azt hogy hogy, a következő alfejezetekben fogjuk definiálni.

1.1. Sarrus-szabály

Egy 1 darab számból álló mátrix determinánsa maga a mátrixot alkotó szám. Egy (2×2)-es determináns kiszámítására maga a Sarrus-szabály a definíció:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= (\text{főátló elemeinek szorzata}) - (\text{mellékátló elemeinek szorzata}) \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

Felhívjuk a <u>következő</u> rész veszélyére a figyelmet. A Sarrus-szabály csak (3×3)-as méretig működik, nagyobb mátrixra NEM használható.

A (3×3)-as mátrix determinánsa hasonlóan számítható. Itt nem csak a főátlóval, és a mellékátlóval kell számolni, hanem a velük párhuzamos „átlókkal" is. Segítségképpen a determináns után odaírhatjuk az első két oszlopát, hogy jobban lássuk a párhuzamosságot.

$$\left|\begin{array}{ccccc|cccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array}\right. , \qquad \left|\begin{array}{ccccc|cccc} a & & b & & c & & a & & b \\ & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\ d & & e & & f & & d & & e \\ & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\ g & & h & & i & & g & & h \end{array}\right.$$

A determináns a következőképp áll össze. A főátlóban és a vele párhuzamos átlókban lévő elemek szorzatát adjuk össze, és ebből vonjuk ki a mellékátlóban, és a vele párhuzamos átlóban lévő elemek szorzatát. Tehát a következőt kell csinálni:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Nézzük meg ezt egy konkrét példán keresztül.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3\cdot(-5)\cdot 1) + (2\cdot 1\cdot(-8)) + ((-4)\cdot(-2)\cdot 2)$$
$$- ((-4)\cdot(-5)\cdot(-8)) - (2\cdot(-2)\cdot 1) - (3\cdot 1\cdot 2)$$
$$= -15 - 16 + 16 + 160 + 4 - 6 = 143$$

1. *Megjegyzés.* Maga a számolási algoritmus nem bonyolult, de ennél a módszernél viszonylag nagy az elszámolás veszélye.

Felhívjuk az előző rész veszélyére a figyelmet. A Sarrus-szabály csak (3×3)-as méretig működik, nagyobb mátrixra NEM használható.

1.2. Sor/oszlop szerinti kifejtés (Kifejtési tétel)

Most mutatunk egy olyan módszert, amivel tetszőleges méretű mátrix determinánsa kiszámolható. (Vigyázzunk, nagy méretű mátrixok esetén nagyon megnő a módszer számolásigénye.)

Sor, illetve oszlop szerinti kifejtésnél gondolnunk kell a mátrixhoz tartozó „sakktáblára”, ami előjeleket tartalmaz felváltva, a bal felső sarok mindig „+”, és onnantól váltakozik az előjel jobbra és lefelé, mint egy sakktábla színei:

+	−	+	…
−	+	−	…
+	−	+	…
⋮	⋮	⋮	⋱

Kiválasztjuk a determináns tetszőleges sorát vagy oszlopát, ami szerint a kifejtést el akarjuk végezni. Legyen ez először például az **első oszlop**. A determináns értéke a következőképpen adódik. A kiválasztott sor, vagy oszlop elemeit egyesével megszorozzuk a sakktáblában neki megfelelő előjellel, majd megszorozzuk annak a maradék determinánsnak az értékével, amit úgy kapunk, hogy az eredeti determinánsból töröljük az elem sorát és oszlopát. Az így kapott értékeket összeadva kapjuk meg a determináns értékét. A példán talán jobban látszik, hogy hogyan kell csinálni.

Példa. A determinánsban a piros előjelek a sakktábla megfelelő elemeit jelölik.

$$\begin{vmatrix} 3^{+} & 2 & -4 \\ -2^{-} & -5 & 1 \\ -8^{+} & 2 & 1 \end{vmatrix} = +3\cdot\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-8)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

A módszer lényege, hogy egy $(n \times n)$ méretű determinánst vissza tudunk vezetni $(n-1) \times (n-1)$-es determinánsokra. Folytassuk az (1) egyenlőséget, mivel a (2×2)-es determinánsok értéke már könnyen számolható:

$$\begin{aligned}(1) &= 3 \cdot ((-5) \cdot 1 - 1 \cdot 2) + 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 8 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot (-5)) \\ &= 3 \cdot (-7) + 2 \cdot 10 - 8 \cdot (-18) = -21 + 20 + 144 = 143.\end{aligned}$$

Ellenőrzésképpen végezzük el a determináns kifejtését a **második sora** szerint is:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2^{-} & -5^{+} & 1^{-} \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) - 5 \cdot (3 \cdot 1 - (-4) \cdot (-8)) - 1 \cdot (3 \cdot 2 - 2 \cdot (-8)) \\ &= 2 \cdot 10 - 5 \cdot (-29) - 1 \cdot 22 = 20 + 145 - 22 = 143.\end{aligned}$$

2. *Megjegyzés.* Ez a módszer tetszőleges méretű determinánsokra is működik, szemben a Sarrus-szabállyal, ami csak (2×2)-es és (3×3)-as determinánsokra alkalmazható.

3. *Megjegyzés.* Ha van a mátrix elemei között nulla, akkor érdemes lehet olyan sort, vagy oszlopot választani a kifejtéshez, amiben hemzsegnek a nullák. Ugyanis a kifejtésnél a nullához tartozó kisebb determináns 0-val szorzódna, így fel sem fontos tüntetni.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ 10 & 6 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(-3) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)(-1)(4-3) = 3$$

A fenti determinánst a harmadik oszlopa szerinti kifejtéssel határoztuk meg. Így egy 3×3-as determinánst kaptunk, amit pedig az első oszlopa szerinti kifejtéssel kaptunk meg.

4. *Megjegyzés.* Dolgozatokban érdemes a kifejtéses módszert alkalmazni, mert elszámolási hiba esetén még esetleg lehet részpontot adni, míg a Sarrus-szabálynál ez nehezebben oldható meg.

1.3. Elemi átalakítások (Gauss-elimináció)

Ez a módszer ugyanúgy alkalmazható tetszőleges méretű mátrixokra, és sokkal gyorsabb is, viszont nem olyan egyszerű algoritmus szerint működik, mint az előző kettő. Egyébként nagyon fontos algoritmus elméleti és gyakorlati szempontból is. A kurzuson is elő fog még kerülni több kontextusban.

5. Tétel (Determinánsokra vonatkozó alapvető tulajdonságok.)**.**

1. *Egy determináns előjelet vált, ha két sorát megcseréljük.*
2. *Ha egy determináns valamelyik sora nulla, akkor a determináns értéke nulla.*
3. *Egy determináns értéke nulla, ha van két azonos sora.*
4. *Ha a determináns egy sorában minden elemet ugyanazzal a nemnulla konstanssal megszorzunk, vagy elosztunk, akkor a determináns értéke is ezzel a konstanssal szorzódik, vagy osztódik.*
5. *Egy determináns értéke nulla, ha az egyik sora egy másik sor valamely konstans-szorosa.*
6. ***A determináns értéke nem változik, ha valamelyik sorhoz hozzáadjuk egy másik sor konstans-szorosát.***
7. *Dualitási elv: az* $1-6$. *állításokban a „sor” szó kicserélhető az „oszlop” szóra.*

A félkövérrel kiemelt tulajdonság ismételt használatával gyorsan ki tudjuk számítani a determinánst, mert meg tudjuk növelni a determinánsban szereplő nullák számát. A felsorolás többi eleme is hasznos lehet, de az alkalmazásuk nem szükségszerű.

Példa.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -29 & 10 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(3)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} -29 & 10 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} (-7)\cdot(-29) - 6 \cdot 10 = 143.$$

- (1): A 2. sorhoz hozzáadtam a 3. sor (-1)-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (2): Az 1. sorhoz hozzáadtam a 3. sor 4-szeresét, azaz alkalmaztam a Tétel 6. állítását.
- (3): Kifejtettem a determináns a 3. oszlopa szerint. (A sok nulla miatt valójában csak egy kisebb determinánst kell kiszámolni.)
- (4): Sarrus-szabályal megkaptam a végső eredményt.

1.4. Érdekesség

Mindkét említett általános algoritmus könnyen programozható, és egy 100×100-as mátrix determináns kiszámítását nyilván nem kézzel fogjuk kiszámítani. Azonban számítógép használata esetén minden számítási algoritmusnál meg kell vizsgálni az alábbi két tulajdonságot.

1. Milyen gyors az algoritmus?
2. Mennyire pontos az algoritmus?

Az utóbbit itt most nem boncolgatjuk, viszont az első kérdésre a fenti algoritmusok tekintetében meglepő eredmények adhatók.

Egy $(n\times n)$-es mátrix determinánsának kiszámítása a kifejtéses módszerrel $\mathcal{O}(n!)$ időigénnyel tehető meg. Ha Gauss-eliminációt használunk, akkor bizonyítható, hogy az időigény csak $\mathcal{O}(n^3)$. Röviden rávilágítanánk arra, hogy mennyivel jelent ez nagyobb gyorsaságot. Tegyük fel, hogy egy 5 GHz-es processzorú számítógéppel számolunk, ami azt jelenti, hogy 5 milliárd műveletet tud elvégezni másodpercenként. A könnyítés kedvéért a továbbiakban csak az ordo utáni függvényekkel számolunk. (A kapott eredményeket valami konstanssal meg kellene szorozni, a nagyságrendeken ez nem változtatna.)

Ha $n = 3$, akkor a mátrix determinánsának kiszámítása kifejtéses módszerrel $0,12 \cdot 10^{-8}$ másodpercig tart, míg Gauss-eliminációval $0,54 \cdot 10^{-8}$ másodpercig. Itt még a kifejtéses módszer a gyorsabb. Ha $n = 10$, akkor az első módszerrel a számítás $0,00072576$ másodpercig tart, Gauss-eliminációval $0,0000002$ másodpercig tart. Itt az első módszer már több mint 3000-szer lassabb, de gyakorlatilag ez még elhanyagolható, mert a végső idő itt is kicsi.

Nézzük az $n = 15$ esetet. Gauss-eliminációval az időigény $0,000000675$ másodperc, míg kifejtéses módszerrel $4,358914560$ perc. Ez már eléggé érzékelhető és zavaró különbség. Ha $n = 20$, akkor a Gauss-eliminációnak még mindig jóval másodperc alatti idő szükséges, $0,0000016$ másodperc, míg a kifejtéses módszernek $15,64366003$ évre lenne szüksége. Nem lenne túl hatékony ezt kivárni, és még nagyon messze vagyunk a (100×100)-as mérettől.

Végül ugorjunk egy „hatalmasat”, legyen $n = 50$. A Gauss-elimináció még mindig hatékony, időigénye $0,000025$ másodperc. A kifejtéses módszerrel már komoly problémába ütköznénk, ugyanis $0.1955638709 \cdot 10^{48}$ évre lenne szüksége. A Nap várható hátralévő élettartamát 5-10 milliárd évre becsülik, tehát a Nap már nem élné meg az eredményt. Ha jól tudjuk, akkor ez a számolási időigény már a világegyetem várható életkoránál is nagyobb szám. Ha valaki kíváncsi rá, hogy a Gauss-elimináció mekkora n esetén megy 1 másodperc fölé, az könnyen kiszámolhatja egy egyszerű egyenletmegoldással. A fenti adatokat foglalja össze az alábbi táblázat.

Méret	Gauss-elimináció	Rekurzív kifejtés
3×3	$0,54 \cdot 10^{-8}$ mp	$0,12 \cdot 10^{-8}$ mp
10×10	$0,0000002$ mp	$0,00072576$ mp
15×15	$0,000000675$ mp	$4,358914560$ perc
20×20	$0,0000016$ mp	$15,64366003$ év
50×50	$0,000025$ mp	$0.1955638709 \cdot 10^{48}$ év

Más kérdés, hogy melyik módszer mennyire stabil numerikusan, ebbe most nem megyünk bele, de ez is érdekes kérdés.

A vázolt probléma egyáltalán nem csak elméleti, mert bizonyos területeken valóban több százszor több százas méretű mátrixokkal kell számolni, és ráadásul ezek a mátrixok több tíz tizedesjegy pontosságú tizedes törteket tartalmaznak. Hasonló kérdésekkel találkozhattok a Közelítő és szimbolikus számítások kurzuson.

1.5. Alkalmazások

- Kalkulus: Jacobi-determináns
- Paralelogramma területének, paralelepipedon térfogatának kiszámítása.
- Egyenletrendszerek megoldása Cramer-szabállyal.

- Adott pontokon átmenő sík, egyenes, kör egyenlete is felírható determinánssal.
- Adott egy gráf. Van-e benne kör? Mennyi a feszítőfáinak száma? A kérdések a megfelelő mátrixok determinánsa alapján megoldható. (Informatikai párhuzam: van-e holtpont az erőforrások között? A választ lásd az Operációs rendszerek című kurzuson.)
- Adott egy páros gráf, van-e benne teljes párosítás? Egy speciális determinánssal ez is könnyen eldönthető.

1.6. Kiegészítés

- Wolfram Alpha / Wolfram Mathematica: `Det[3,2,-4,-2,-5,1,-8,2,1]`
- Maple: `LinearAlgebra[Determinant](Matrix([[3,2,-4],[-2,-5,1],[-8,2,1]))`
- Matlab: `det([3 2 -4;-2 -5 1;-8 2 1])`
- Matek.hu

Vektorok, vektortér

Vektorok, vektorműveletek, vektortér,
lineáris független vektorrendszerek.

1. Vektorműveletek

1. Definíció. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és a $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ két $\mathbb{R}^3$-beli vektor, és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges skalár. Ekkor definiálhatjuk a vektorok **összeadás**át és **skalárszoros**át:

- $\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \in \mathbb{R}^3$,
- $c\underline{a} = (ca_1, ca_2, ca_3) \in \mathbb{R}^3$.

2. *Megjegyzés.* Természetesen a fenti definíciók nem csak három koordinátájú vektorokra igazak, hanem tetszőleges véges dimenziójú vektorokra. Ugyanúgy mint mátrixok, és mint minden új objektum esetében érdemes megemlékezni a műveletek legfontosabb tulajdonságairól.

3. Tétel. *A sík vagy a tér tetszőleges $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ szabadvektoraira és tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ skalárokra*

- $\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c}$,
- $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$,
- $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$,
- $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$,
- $c(\underline{a} + \underline{b}) = c\underline{a} + c\underline{b}$,
- $(c + d)\underline{a} = c\underline{a} + d\underline{a}$,
- $c(d\underline{a}) = (cd)\underline{a}$,
- $1\underline{a} = \underline{a}$,
- $0\underline{a} = c\underline{0} = \underline{0}$.

A fenti tétel azért van kis betűvel szedve, mert igazából nem is tételek, hanem könnyen átgondolható trivialitások. Főleg, ha egy n-dimenziós vektort egy $(1 \times n)$-es mátrixnak képzelünk el, mert akkor ezekkel a tulajdonságokkal már találkoztunk.

4. Definíció. Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Ekkor az $\underline{a}$ **hossz**át $|\underline{a}|$-val jelöljük, és a következő módon számoljuk ki:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

5. *Megjegyzés.* Természetesen az előző definícióhoz hasonló megfogalmazható 2-dimenziós vektorokra, és 3-nál magasabb dimenziós vektorokra is.

6. Definíció. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok **skaláris szorzat**án a

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\underline{a}, \underline{b})$$

szorzatot értjük, ahol $\cos(\underline{a}, \underline{b})$ az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektor által bezárt szög koszinusza.

7. Tétel. *Legyen az* $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és a* $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *két* $\mathbb{R}^3$*-beli vektor. Ekkor*

$$\underline{ab} = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

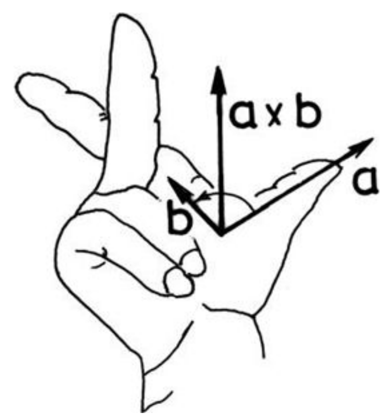
8. *Megjegyzés.* A skaláris szorzásra vonatkozó tétel természetes módon átalakítható magasabb dimenzióra is.

Tegyünk különbséget a definíció és a tétel között. Ha meg van adva két vektor, például $(1, 2, 3)$ és $(-5, 2, 1)$, akkor hogy számítjuk ki a skaláris szorzatukat? Hát nem definíció szerint, mert nem ismerjük a köztük lévő szöget. Ha azonban tudjuk a vektorok hosszát és a szögét, akkor nyugodtan alkalmazhatjuk a definícióban szereplő képletet.

9. Definíció. Legyen az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ két $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Ekkor $\underline{a} \times \underline{b}$ jelöli azt a vektort, amely a két vektor **vektoriális szorzat**ának eredménye. Erre az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektorra teljesül, hogy

$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin(\underline{a}, \underline{b}),$$

valamint, hogy $\underline{a} \times \underline{b}$ merőleges az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorra is, és az irányát a jobbkézszabály határozza meg.



10. Tétel. *Legyen az* $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és a* $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *két* $\mathbb{R}^3$*-beli vektor. Ekkor*

$$\begin{aligned} \underline{a} \times \underline{b} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i}\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{j}\,(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{k}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1). \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

11. *Megjegyzés.* A skaláris szorzattal ellentétben a vektoriális szorzat nehezen terjeszthető ki magasabb dimenziókra.

12. Definíció. Legyen az $\underline{a}, \underline{b}$ és a $\underline{c}$ három $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Ekkor az

$$\underline{abc} = \langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle$$

mennyiséget a három vektor **vegyes szorzat**ának nevezzük.

13. *Megjegyzés.* A vegyes szorzat geometriailag az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon „előjeles térfogatát” adja meg.

14. Tétel. *Legyen az* $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *és a* $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *három* $\mathbb{R}^3$*-beli vektor. Ekkor*

$$\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

15. Példa. $\underline{a} = (2, 6, -1)$, $\underline{b} = (-3, -9, 8)$, $\underline{c} = (5, 3, -2)$

- $\underline{a} + \underline{b} = (2 - 3, 6 - 9, -1 + 8) = (-1, -3, 7)$
- $4\underline{a} = (4 \cdot 2, 4 \cdot 6, 4 \cdot (-1)) = (8, 24, -4)$
- $\underline{ab} = 2 \cdot (-3) + 6 \cdot (-9) + (-1) \cdot 8 = -68$
- $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & -9 & 8 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -9 & 8 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = (39, -13, 0)$
- $\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -3 & -9 & 8 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 36 + 9 + 240 - 45 - 36 - 48 = 156$

2. Vektortér

Ebben a fejezetben bevezetjük az absztrakt vektortér fogalmát.

16. Definíció. A T számtest feletti **vektortér** egy olyan $(V, +, \cdot)$ struktúra, melyre tetszőleges $u, v, w \in V$ és $c, d \in T$ esetén teljesül az alábbi 8 axióma.

1. $u + v = v + u$.
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. Létezik 0-vektor.
4. Létezik additív inverz (ellentett).
5. $c(u + v) = cu + cv$.
6. $(c + d)u = cu + du$.
7. $(cd)u = c(du)$.
8. $1u = u$.

Egyszerűen csak meg kell próbálni elengedni azt a berögzülést, hogy a vektor szó hallatán egy (v_1, v_2, v_3) alakú valamire gondolunk. Például gondoljunk bele, hogy legfeljebb másodfokú polinomokat ugyanúgy össze tudunk adni egymással, meg valós számmal megszorozni, mint vektorokat. Tehát akkor joggal nevezhetnénk a legfeljebb másodfokú polinomokat is vektoroknak, halmazukat pedig vektortérnek. (Ehhez az is kell, hogy a fenti nyolc tulajdonság teljesüljön, de tényleg teljesül.) Ettől függetlenül mi ugyanúgy csak „igazi” vektorokkal fogunk dolgozni.

17. Definíció. Legyen V egy T számtest feletti vektortér. Legyen továbbá $n \in \mathbb{N}_0$, $v_1, \dots v_n \in V$, és $c_1, \dots c_n \in T$. Ekkor a

$$v = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

vektort a $v_1, \dots, v_n \in V$ vektorok $c_1, \dots c_n$ együtthatókkal képzett **lineáris kombináció**jának nevezzük. Ha minden c_i együttható nulla, akkor **triviális lineáris kombináció**ról beszélünk.

18. Példa. Legyenek $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a tér x, y, z tengely irányába eső egységvektorai. Ekkor a tér tetszőleges $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektora felírható ezen egységvektorok lineáris kombinációjaként: $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$.

19. Definíció. Legyen V egy T számtest feletti vektortér. A V elemeiből képzett véges rendszereket **vektorrendszer**eknek nevezzük. Egy ilyen $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer **lineárisan független**, ha a zérusvektor csak triviális lineáris kombinációként állítható elő, azaz bármely $c_1, \ldots, c_k \in T$ esetén,

$$\text{ha } c_1v_1 + \ldots c_kv_k = 0, \text{ akkor } c_1 = \ldots c_k = 0.$$

Ellenkező esetben a vektorrendszert **lineárisan függő**nek nevezzük.

20. Példa. Ha egy vektorrendszer tartalmazza a nullvektort, vagy egynél többször valamely vektort, akkor lineárisan függő. A térbeli $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ vektorrendszer lineárisan független.

21. Tétel. *Legyen az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és a $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ három $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorrendszerből alkotott*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

determináns nulla.

22. Példa. Független-e az alábbi három vektor?

$$\underline{a} = (-2; 1; 0),\ \underline{b} = (4; 0; 2),\ \underline{c} = (0; -1; -5)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} &= -2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \\ &= -2(0 - (-2)) - 1(-20 - 0) = -4 + 20 = 16 \end{aligned}$$

Mivel a determináns nem nulla, a három vektor lineárisan független.

23. Példa. Lineárisan függő-e az alábbi három vektor?

$$a = (-3; 0; 1; 2), \quad b = (-1; 2; 0; 0), \quad c = (-2; -2; 1; 2)$$

Ez determináns számolással nem dönthető el, tehát Gauss-eliminációval kell megoldani feladatot.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) : Az 1. és 2. sort megcseréljük.
(2) : Az 1. sor (-3)-szorosát hozzáadom a 2. sorhoz.
(3) : Az 1. sor (-2)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.
(4) : A 2. sor (-1)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.
(5) : Elhagyom a 3. csupa nulla sort.
Mivel kevesebb sorunk maradt (a vektorrendszer rangja kettő), mint ahány vektorral indultunk, ezért a vektorrendszer lineárisan függő.

24. Példa. Lineárisan függő-e az alábbi három vektor?

$$a = (-1;2;0;0), \quad b = (-2;-2;1;2), \quad c = (1;2;1;2)$$

Ez determináns számolással nem dönthető el, tehát Gauss-eliminációval kell megoldani feladatot.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{10}{6} & \frac{20}{6} \end{pmatrix}$$

(1) : Az 1. sor (-2)-szeresét hozzáadom a 2. sorhoz.
(2) : Az 1. sor 1-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.
(3) : A 2. sort osztom 6-tal.
(4) : A 2. sor 4-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz.
Mivel ugyanannyi sorunk maradt (a vektorrendszer rangja három), mint ahány vektorral indultunk, ezért a vektorrendszer lineárisan független.

LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

1. Alapfogalmak

1. Definíció. Egy m egyenletből álló, n-ismeretlenes **lineáris egyenletrendszer** általános alakja:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{7}$$

Az egyenletrendszer felírható $A\underline{x} = \underline{b}$ formában is, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix az egyenletrendszer (együttható)mátrixa, az egyenletrendszer bővített mátrixa pedig

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

A következő definícióban a lineáris egyenletrendszer megoldásának definícióját adjuk meg.

2. Definíció. A (7) egyenletrendszer **megoldás**ának nevezünk egy $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ szám n-est (azaz vektor), ha azt a (7)-be visszahelyettesítve minden egyenlőség teljesül.

3. Példa. Az

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek a $(11, 5)$ vektor megoldása.

Egy egyenletrendszer láttán több kérdés is felmerül (teljesen) jogosan. Megoldható-e? Ha igen, hány megoldása van? Ha esetleg végtelen sok megoldása van, akkor meg tudjuk adni az összeset. A következőkben ezeket a kérdéseket fogjuk megválaszolni lineáris egyenletrendszerekre.

2. Gauss-elimináció

A Gauss-elimináció egy algoritmus, mellyel tetszőleges lineáris egyenletrendszernek megkapható az összes megoldása. Az ereje abban rejlik, hogy egy lineáris egyenletrendszernek az egyenletei módosíthatók úgy, hogy az új egyenletek ugyanazt az információt hordozzák, mint a régiek.

4. Definíció. Egyenletrendszer **elemi átalakítás**ai (bővített mátrix elemi átalakításai):

(1) Két egyenletet (sort) felcserélünk.
(2) Egy egyenletet (sort) megszorzunk egy tetszőleges nemnulla skalárral.
(3) Valamelyik egyenlethez (sort) hozzáadjuk egy másik egyenlet (sort) skalárszorosát.
(4) Ha az egyik egyenletben minden együttható és a jobb oldali konstans is nulla, akkor az egyenletet elhagyjuk. (A csupa nulla sort elhagyjuk.)

Az tény, hogy ezzel tudjuk módosítani az egyenletrendszer alakját, de valamilyen célra is szükségünk van, mert egyébként vég nélkül alkalmazhatnánk az elemi átalakításokat. A cél az, hogy az egyenletrendszer (mátrixa) lépcsős alakú legyen.

5. Definíció. Egy egyenletrendszer (mátrixa) **lépcsős alak**ú, ha a bővített mátrixának

1. nincs csupa nulla sora és
2. minden sorának első nemnulla eleme hátrább van, mint a fölötte álló sor első nemnulla eleme.

6. Tétel (Gauss-elimináció)**.** *Bármely nem azonosan nulla bővített mátrixú egyenletrendszer lépcsős alakra hozható elemi átalakításokkal, és ebből az egyenletrendszer megoldása könnyen kiolvasható.*

7. Példa. Az előző példa megoldása ezzel a módszerrel a következőképpen alakul:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\clubsuit} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$\clubsuit$: A 2. sorhoz hozzáadjuk az első sor (-2)-szeresét.

A megoldás visszafejtése:

- Alsó sor: $y = 5$.
- Első sor: $x - 2y = 1$. Ebbe behelyettesítjük az $y = 5$-öt, tehát $x = 11$.

8. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 1 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(7)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 & 18 \end{array}\right)$$

(1) : 1. és 3. sor cseréje.
(2) : A 2. sorhoz hozzáadjuk az 1. sort.
(3) : A 3. sorhoz hozzáadjuk az 1. sor (-2)-szeresét. A 4. sorhoz hozzáadjuk az 1. sor (-2)-szeresét.
(4) : A 2. sort megszorozzuk (-1)-gyel.
(5) : A 3. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor (-7)-szeresét. A 4. sorhoz hozzáadjuk a 2. sor (-6)-szorosát.
(6) : A 4. sorból levonjuk a 3. sort.
(7) : Elhagyjuk a 4. sort.

Megoldás visszafejtése:

- $-11z = 18 \Longrightarrow z = -\frac{18}{11}$
- $y + z = -3 \Longrightarrow y - \frac{18}{11} = -3 \Longrightarrow y = -3 + \frac{18}{11} = -\frac{15}{11}$
- $x - 2y + z = 2 \Longrightarrow x - 2\left(-\frac{15}{11}\right) + \left(-\frac{18}{11}\right) = 2 \Longrightarrow x = 2 + \frac{18}{11} - \frac{30}{11} = \frac{10}{11}$

Megkaptuk az egyenletrendszer **egyetlen** megoldását: $\left(\frac{10}{11}, -\frac{15}{11}, -\frac{18}{11}\right)$.

Az előző mondatban az egyetlen szó ki van emelve. Ugyanis honnan tudjuk, hogy nincs több? Ha jól megnézzük, akkor három lehetséges módon érhet véget az algoritmusunk.

9. Tétel. *Ha az elemi átalakításokkal az $(A|\underline{b})$ egyenletrendszert $(B|\underline{d})$ lépcsős alakra hozzuk, akkor a következő valamelyike teljesül.*

(1) A $(B|\underline{d})$ mátrix tartalmaz ellentmondó sort, azaz olyan sort, melyben a vonaltól balra minden együttható nulla, a jobboldali elem pedig nemnulla.
(2) A $(B|\underline{d})$ mátrix nem tartalmaz ellentmondó sort, és B négyzetes.
(3) A $(B|\underline{d})$ mátrix nem tartalmaz ellentmondó sort, és B-nek több oszlopa van, mint sora.

10. Tétel. *Az előző tétel eredménye mellett a lineáris egyenletrendszernek a következő lehetséges megoldásai lehetnek.*

(1) Az egyenletrendszernek ***nincs megoldás****a.*
(2) Az egyenletrendszernek pontosan ***egy darab*** *megoldása van (melyet a lépcsős alakból visszafejtve kaphatunk meg.)*
(3) Az egyenletrendszernek ***végtelen sok*** *megoldása van (melyet a lépcsős alakból visszafejtve kaphatunk meg.)*

A végtelen sok megoldás esetében a lépcsős alakban van olyan változó (oszlop), mely nem tartalmazza egyik sornak sem az első nemnulla elemét. Ez lehetőséget teremt a változók osztályozására.

11. Definíció. A (7) egyenletrendszer bővített mátrixának lépcsős alakjában a soronkénti első nem nulla elemek oszlopainak megfelelő változókat **kötött változó**knak nevezzük.

12. Definíció. A (7) egyenletrendszer nem kötött változóit **szabad változó**knak nevezzük.

13. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & + & 7z & = & 8 \\ 9x & + & 10y & + & 11z & = & 12 \\ 13x & + & 14y & + & 15z & = & 16 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

(1) : Az 1. sor (-5)-szörösét hozzáadom a 2. sorhoz. Az 1. sor (-9)-szeresét hozzáadom a 3. sorhoz. Az 1. sor (-13)-szorosát hozzáadom a 4. sorhoz.
(2) : A 2. sort elosztom (-4)-gyel. A 3. sort elosztom (-8)-cal. A 4. sort elosztom (-12)-vel.
(3) : A 3. sorból kivonom a 2. sort. A 4. sorból kivonom a 2. sort. Mivel csupa nulla sorokat kapunk, el is hagyjuk azokat.

Megoldás visszafejtése:

- A harmadik oszlopnak megfelelő z változó szabad változó, tehát $z \in \mathbb{R}$ tetszőleges értéket felvehet.

- $y + 2z = 3 \Longrightarrow y = 3 - 2z$
- $x + 2y + 3z = 4 \Longrightarrow x = 4 - 3z - 2y = 4 - 3z - 2(3 - 2z) = 4 - 3z - 6 + 4z = -2 + z$

Megkaptuk az egyenletrendszer **végtelen sok** megoldását. A képletbe behelyettesítve egy tetszőleges z értéket, megkapunk egy rögzített megoldást. Az általános megoldás felírható

$$(-2 + z, 3 - 2z, z)$$

alakban, ahol $z \in \mathbb{R}$.

14. Példa. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 4x & + & 4y & + & 5z & = & 6 \\ 7x & + & 7y & + & 8z & = & 10 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1) : Az 1. sor (-4)-szeresét hozzáadjuk a 2. sorhoz. Az 1. sor (-7)-szeresét hozzáadjuk a 3. sorhoz.
(2) : A második sort elosztom (-3)-mal.
(3) : A 3. sorhoz hozzáadom a 2. sor 6-szorosát.

Megoldás visszafejtése:

- Utolsó sor: $0 = 1 \Longrightarrow$ Ellentmondás.

Azt kaptuk, hogy az egyenletrendszernek **nincs megoldása**.

Tehát összefoglalva az eddigi eredményeinket:

15. Tétel. *Bármely lineáris egyenletrenszernek **0, 1 vagy végtelen sok** megoldása van.*

- *Az egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha a bővített mátrixának lépcsős alakjában van ellentmondó sor:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right), \text{ ahol } c \neq 0.$$

- *Az egyenletrendszernek pontosan akkor van végtelen sok megoldása, ha van szabad változója.*
- *Az egyenletrendszernek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha a bővített mátrixának lépcsős alakjának ugyanannyi sora van, mint ahány ismeretlen, azaz nincs szabad változó.*