MTN113E: Vektorok

(előadás)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Vektortér

1. Definíció. A V nemüres halmaz vektortér $\mathbb{R}$ felett (röviden valós vektortér) az $\oplus$ (összeadás) kétváltozós és $\lambda\odot$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ műveletekkel, ha

(1) az összeadás kommutatív: $\forall u, v \in V$ esetén $u + v = v + u$,
(2) az összeadás asszociatív: $\forall u, v, w \in V$ esetén $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(3) az összeadásnak van egységeleme: $\exists o \in V$ $\forall u \in V$-re, amelyre $o + u = u + o = u$,
(4) minden vektornak van additív inverze: $\forall u \in V$ $\exists u' \in V$, amelyre $u + u' = u' + u = o$,
(5) $\forall v \in V$ esetén $1 \cdot v = v$,
(6) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$ estén $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$,
(7) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$ esetén $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
(8) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in V$ esetén $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

2. Példa. A következők vektorteret alkotnak:

- Síkbeli vektorok ($\mathbb{R}^2$), térbeli vektorok ($\mathbb{R}^3$).
- Az $\mathbb{R}^n$ halmaz, amin definiáljuk az összeadást, és a valós számokkal történő szorzást a következő módon. Ha $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &\overset{\text{def.}}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\\ \alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) &\overset{\text{def.}}{=} (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).\end{aligned}$$

- Az $m \times n$-es valós mátrixok $\mathbb{R}^{m\times n}$ halmaza, a mátrixok összeadásával, és a skalárral való szorzással.

3. Tétel. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett, ekkor teljesülnek a következők

(a) A V-n értelmezett összeadásra vonatkozóan pontosan egy egységelem van.
(b) Minden V-beli elemnek egyetlen additív inverze van.

Bizonyítás.

(a) Legyen o_1 és o_2 is egységelem. Ekkor $o_1 = o_1 + o_2 = o_2$, az első egyenlőség azért teljesül , mert o_2 egységelem, a második pedig azért, mert o_1 egységelem.
(b) **H.F. (nov. 15.)** (Hasonlóan a mátrix inverzének bizonyításához az előző előadáson.)

$\square$

4. Definíció. A vektortér egyértelműen meghatározott additív egységelemét zérusvektornak nevezzük, jele: $\underline{0}$.

5. Példa. A zérusvektor és a vektorok additív inverze a 2. példában szereplő vektorterek esetén a következők.

- $\mathbb{R}^2 : \underline{0} = (0, 0)$, az $u = (x_1, x_2)$ additív inverze $-u = (-x_1, -x_2)$,
  $\mathbb{R}^3 : \underline{0} = (0, 0, 0)$, az $u = (x_1, x_2, x_3)$ additív inverze $-u = (-x_1, -x_2, -x_3)$.
- $\mathbb{R}^n : \underline{0} = (0, \ldots, 0)$, az $u = (x_1, \ldots, x_n)$ additív inverze $-u = (-x_1, \ldots, -x_n)$.
- $\mathbb{R}^{m\times n}$ zérusvektor az $m \times n$-es nullmátrix, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ additív inverze a $-A$ mátrix.

6. Definíció. Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett, $v_1, \ldots, v_k \in V$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Ekkor a $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$ vektort a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ skalárokkal képzett lineáris kombinációjának nevezzük. Ha $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, akkor triviális lineáris kombinációról beszélünk.

7. Példa. A $v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, 1)$ vektorok $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$ és $\alpha_3 = 5$ skalárokkal képzett lineáris kombinációja:

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 = 2 \cdot (1, 1, -1) + (-3) \cdot (0, 1, 1) + 5 \cdot (0, 1, 1) = (2, 4, -10).$$

8. Definíció. Az $\mathbb{R}$ feletti V vektortér $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszere lineárisan független, ha pontosan akkor teljesül, hogy $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = \underline{0}$, ha $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$, azaz csak a triviális lineáris kombináció állítja elő a $\underline{0}$-t. Különben a vektorrendszer lineárisan függő.

9. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ vektortérben

- 2 vektor lineárisan független pontosan akkor, ha nincsenek egy egyenesben;
- 3 vektor lineárisan független pontosan akkor, ha nincsenek egy síkban.

10. Tétel. Az $\mathbb{R}$ feletti V vektortér $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszere akkor és csak akkor lineárisan függő, ha van olyan v_i vektor ($1 \leq i \leq k$), amely előáll a $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás.
„$\Rightarrow$" Ha a $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszer lineárisan függő, akkor van olyan lineáris kombinációjuk, amely nem triviális módon állítja elő a $\underline{0}$-t.

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k &= \underline{0}, \quad \text{ahol létezik } \lambda_i \neq 0 \\ \lambda_i v_i &= -\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_{i-1} v_{i-1} - \lambda_{i+1} v_{i+1} \cdots - \lambda_k v_k \quad |: \lambda_i \neq 0 \\ v_i &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \cdots - -\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} v_k, \end{aligned}$$

tehát van olyan vektor, ami előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
„$\Leftarrow$" **H.F. (nov. 15.)** $\square$

11. Tétel. Tetszőleges $\mathbb{R}$ feletti V vektortér esetén teljesülnek a következők:

(1) Ha egy vektorrendszer valamely részrendszere lineárisan függő, akkor a vektorrendszer is lineárisan függő.
(2) Lineárisan független vektorrendszer bármely részrendszere is lineárisan független.

Bizonyítás.

(1) Belátjuk, hogy lineárisan függő vektorrendszert tetszőlegesen bővítve lineárisan függő vektorrendszert kapunk. Ha $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ vektorrendszer lineárisan függő, akkor a 10. tétel alapján létezik i, amelyre $v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_k v_k$. Tetszőleges $v_{k+1} \in V$ esetén a $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ vektorrendszer is lineárisan függő, ugyanis:
$$v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \lambda_k v_k + 0 v_{k+1}$$
Tehát lineárisan függő vektorrendszert bővítve lineárisan függő vektorrendszert kapunk.
(2) Ha lineárisan függő lenne valamelyik részrendszer, akkor az (1) alapján a teljes vektorrendszer is lineárisan függő lenne.

$\square$

12. Házi feladat. (nov. 22.) Igazak-e az állítások, ha igaz, bizonyítsuk, ha nem, adjunk ellenpéldát.

(a) Ha az $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és $v_1, v_2, \ldots, v_k$ lineárisan független, akkor $u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_k + v_k$ is lineárisan független vektorrendszer.
(b) Ha az $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_k, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor az $u_1, u_2, \ldots, u_k$ és a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ is lineárisan független vektorrendszer.
(c) Ha az $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_k, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor $u_1, u_2, \ldots, u_k$ valamint a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ is lineárisan függő vektorrendszer.

13. Definíció. A vektorrendszerek elemi átalakításai a következők:

(1) Tetszőleges vektort helyettesíthetünk a nemnulla skalárszorosával.
(2) Tetszőleges vektort helyettesíthetünk a vektor és a vektorrendszerből egy másik vektor skalárszorosának összegével.
(3) Zérusvektort elhagyhatunk/hozzávehetünk a vektorrendszerből/hez.

14. Definíció. Két vektorrendszer ekvivalens, ha elemi átalakításokkal egymásból megkaphatók.

15. Megjegyzés. A mátrixok lépcsős alakra hozásakor alkalmazott elemi átalakítások a mátrix sorvektorrendszerének elemi átalakításainak felelnek meg.

16. Állítás. Legyen $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer $\mathbb{R}^n$-ben. Tekintsük azt a mátrixot, amelynek sorvektorrendszere $u_1, \dots, u_k$, majd elemi átalakításokkal hozzuk lépcsős alakra. Az így kapott mátrix nemnulla soraiból alkotott $\mathbb{R}^n$-beli vektorokat jelölje rendre $v_1, \dots, v_\ell$. Ekkor teljesülnek a következők:

(1) a $v_1, \dots, v_\ell$ vektorrendszer lineárisan független;
(2) ha $\ell < k$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer lineárisan függő;
(3) ha $\ell = k$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer lineárisan független.

Bizonyítás.

(1) A $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszert egy lépcsős alakú mátrix nemnulla sorai alkotják. Jelölje x_i a v_i vektor első nemnulla komponensét $(1 \leq i \leq \ell)$.

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_\ell \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ 0 & x_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & x_\ell \end{pmatrix}$$

Ha tekintjük a $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\ell v_\ell = \underline{0}$ lineáris kombinációt, akkor az összegzésnél az x_1 elemet tartalmazó komponens esetén a többi vektor megfelelő komponense nulla, tehát $\lambda_1 x_1 = 0$-nak kell teljesülnie, de $x_1 \neq 0$, így $\lambda_1 = 0$. Ezért az x_2-t tartalmazó komponens esetén is minden más vektor megfelelő komponensében 0 szerepel, tehát $\lambda_2 x_2 = 0$-nak teljesülnie kell, és $x_2 \neq 0$, így $\lambda_2 = 0$. Ezt folytatva tetszőleges $i \in \{1, \dots, \ell\}$ esetén megkapjuk, hogy $\lambda_i = 0$. Tehát csak a triviális lineáris kombináció állítja elő a $\underline{0}$-t, tehát a $v_1, \dots, v_\ell$ vektorrendszer lineárisan független.

(2) Ha $\ell < k$, akkor a lépcsős alak kialakítása során keletkezett olyan sor, ami csak 0-kat tartalmaz. Azaz, az $u_1, \dots, u_k$ vektorok nemtriviális lineáris kombinációjaként megkaptuk a $\underline{0}$-t, így lineárisan függő a vektorrendszer.

(3) Ha $\ell = k$, akkor az $u_1, \dots, u_k$ vektorrendszer nem lehet lineárisan függő, hiszen akkor nemtriviális lineáris kombinációjukként előállna a $\underline{0}$, azaz lenne olyan sor a lépcsős alakban, ami csak 0-kat tartalmazna, így $\ell < k$-t kapnánk.

□

17. Definíció. Vektorrendszer maximális lineárisan független részrendszerének nevezzük egy olyan lineárisan független részrendszerét, amely már nem bővíthető tovább úgy, hogy a részrendszer lineárisan független maradjon.

18. Megjegyzés. Az $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszerből a következőképpen választható ki maximális lineárisan független részrendszer. Tekintsük azt a mátrixot, melynek sorvektorrendszere $u_1, \dots, u_k$, a sorokat jelöljük meg, majd hozzuk lépcsős alakra a mátrixot. Az így kapott mátrix nemnulla sorainak megfelelő eredeti vektorok maximális lineárisan független részrendszert alkotnak. Általában több maximális lineárisan független részrendszer is megadható egy vektorrendszer esetén, de ezen részrendszerek elemszáma mindig megegyezik.

19. Példa. Megadunk egy maximális lineárisan függő részrendszert az $u_1 = (1, 2, -3, 4)$, $u_2 = (2, 6, -2, 2)$, $u_3 = (0, 1, 2, -3)$, $u_4 = (1, 1, -4, 3)$ vektorrendszerben.

$$\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Tehát az u_1, u_3, u_4 vektorok maximális lineárisan független részrendszert alkotnak.

2. Euklideszi tér

20. Definíció. Legyen $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Az u, v vektorok standard belső szorzata (skaláris szorzata) a következő:

$$\langle u, v\rangle = uv^T = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

21. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ vektorteret a standard belső szorzattal euklideszi térnek nevezzük.

22. Definíció. Az $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor hosszán (normáján) az $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ nemnegatív valós számot értjük. Az u vektor normált, ha $||u|| = 1$.

23. Példa. Az $u = (1, -2, 3) \in \mathbb{R}^3$ vektor hossza $||u|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

24. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér tetszőleges nemzérus u, v vektora esetén létezik egy egyértelműen meghatározott $0 \le \alpha \le \pi$ szög, hogy

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||},$$

amelyet az u és v vektorok szögének nevezünk. Azt mondjuk, hogy az $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektorok merőlegesek (ortogonálisak), ha $\langle u, v\rangle = 0$.

25. Definíció. Az $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer ortogonális, ha bármely $1 \le i < j \le k$ esetén u_i, u_j merőlegesek, azaz $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ $(1 \le i < j \le k)$. Az $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer ortonormált, ha ortogonális, és minden vektora normált, azaz $||u_i|| = 1$, bármely $i \in \{1, \ldots, k\}$ esetén.

26. Példa. A következő vektorrendszerek ortonormáltak

- $\mathbb{R}^3$-ben: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$;
- $\mathbb{R}^2$-ben: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

27. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot ortogonális mátrixnak nevezzük, ha sorvektorrendszere ortonormált vektorrendszert alkot az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben.

28. Példa. A következők ortogonális mátrixok

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

29. Házi feladat. (nov. 29.) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, ekkor

(a) $AA^T =?$
(b) $A^{-1} =?$

30. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér tetszőleges u és $v(\neq \underline{0})$ vektora esetén az u vektor v vektorra vett merőleges vetületén az

$$\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v$$

vektort értjük. Ez a vektor egy egyenesbe esik a v-vel, és hosszúsága $||u|| \cdot \cos\alpha$, ahol α az u és v vektorok szöge. (Ábra a CooSpace-en az előadás-jegyzetnél!)

31. Tétel (Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció). Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér tetszőleges $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független vektorrendszere esetén van olyan $v_1, \ldots, v_k$ ortogonális vektorrendszer, hogy a két vektorrendszer ekvivalens.

32. Megjegyzés. A Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció a következőképpen végezhető el:

(1) legyen a $v_1 = u_1$;

(2) a v_2 vektort úgy kapjuk, hogy vesszük az u_2 vektor merőleges vetületét a v_1 vektorra, majd ezt kivonjuk az u_2-ből:

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1;$$

(3) hasonlóan kapjuk a v_3 vektort is:

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2;$$

a többi vektorra is a fenti eljárást alkalmazzuk.

Ha ortonormált vektorrendszert szeretnénk előállítani az ortogonális vektorrendszerből, akkor a vektorokat el kell osztani a hosszukkal, ez az úgynevezett normálás.

33. Példa. Az $u_1 = (1,0,-1)$, $u_2 = (1,2,-1)$, $u_3 = (0,1,-4) \in \mathbb{R}^3$ vektorrendszeren végzünk Gram–Schmidt ortogonalizációt, majd normáljuk is a vektorokat.

(1) $v_1 = u_1 = (1,0,-1)$;

(2)

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 = (1,2,-1) - \frac{\langle (1,2,-1),(1,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,-1),(1,0,-1)\rangle} \cdot (1,0,-1) = \\ &= (1,2,-1) - \frac{1+0+1}{2} \cdot (1,0,-1) = (0,2,0); \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = \\ &= (0,1,-4) - \frac{\langle (0,1,-4),(1,0,-1)\rangle}{\langle (1,0,-1),(1,0,-1)\rangle} \cdot (1,0,-1) - \frac{\langle (0,1,-4),(0,2,0)\rangle}{\langle (0,2,0),(0,2,0)\rangle} \cdot (0,2,0) = \\ &= (0,1,-4) - \frac{0+0+4}{2} \cdot (1,0,-1) - \frac{0+2+0}{4} \cdot (0,2,0) = \\ &= (0,1,-4) - (2,0,-2) - (0,1,0) = (-2,0,-2); \end{aligned}$$

A $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (0,2,0)$, $v_3 = (-2,0,-2)$ vektorrendszer ortogonális, és ekvivalens az u_1, u_2, u_3 vektorrendszerrel.

Ha ortonormált vektorrendszert szeretnénk kapni, akkor meg kell határoznunk a vektorok hosszát: $||v_1|| = \sqrt{2}$, $||v_2|| = 2$, $||v_3|| = 2\sqrt{2}$. Majd minden vektort el kell osztani a hosszával: $v_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $v_2' = (0,1,0)$, $v_3' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. A v_1', v_2', v_3' vektorrendszer ortonormált.