MTN113E: Mátrixok, lineáris egyenletrendszerek

(előadásvázlat)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Mátrixok

1. Definíció. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$, az A $(m \times n)$-es mátrix egy téglalap alakú táblázat, amelynek m sora és n oszlopa van. A táblázat elemei valós számok, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét a_{ij}-vel jelöljük, bevezetjük a következő jelölést is: $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Az A $(m \times n)$-es mátrix általános alakja:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

1.1. Mátrix műveletek

2. Definíció. Az $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixok összege:

$$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

3. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -8 & 10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Tétel. Tetszőleges $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokra érvényesek az alábbiak:

(1) az összeadás kommutatív: $A + B = B + A$;
(2) az összeadás asszociatív: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

5. Definíció. Az $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral vett szorzata:

$$\lambda A = \lambda (a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

6. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad (-2) \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ 6 & -2 & -14 \end{pmatrix}.$$

7. Tétel. Tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokra és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárokra érvényesek az alábbiak:

(1) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
(2) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
(3) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

8. Definíció. Az $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix transzponáltja az $A^T = (b_{ij})_{n\times m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátix, ahol $b_{ij} = a_{ji}$ teljesül bármely $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ esetén.

9. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

10. Tétel. Tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixokra és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárra érvényesek az alábbiak:

(1) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
(2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
(3) $(A^T)^T = A$.

11. Definíció. Az A és B valós mátrixok szorzata AB pontosan akkor létezik, ha az A mátrix oszlopainak száma megegyeik a B mátrix sorainak számával. Ekkor az $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és a $B = (b_{ij})_{n\times k} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ mátrixok szorzata $AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$, ahol

$$AB = \left(\sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj} \right)_{m\times k}.$$

12. Példa.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 12-6-15 & -2+6+0 \\ 6+0-24 & -1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -18 & -1 \end{pmatrix}.$$

13. Tétel. Tetszőleges A, B, C valós mátrixok és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár esetén, ha a műveletek elvégezhetők, akkor teljesülnek a következők:

(1) a szorzás asszociatív: $A(BC) = (AB)C$;
(2) a szorzás disztributív az összeadásra: $A(B+C) = AB + AC$ és $(A+B)C = AC + BC$;
(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

14. Megjegyzés. A mátrixok szorzása nem kommutatív! Az is lehet, hogy a mátrixok felcserélésével már a szorzás el sem végezhető, de négyzetes ($n \times n$-es) mátrixok esetén sem cserélhetők fel a szorzás tényezői általában.

1.2. Speciális alakú mátrixok

15. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot szimmetrikus mátrixnak nevezünk, ha $A^T = A$ teljesül.

16. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ négyzetes mátrix főátlójának az $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemeket nevezzük.

17. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix felső (alsó) trianguláris, ha a főátlója alatt (felett) minden elem nulla.

18. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix diagonális, ha a főátlóján kívül minden elem nulla.

19. Definíció. Az $n \times n$-es egységmátrix olyan diagonális mátrix, amelynek főátlójában minden elem 1-es:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

20. Definíció. Az $n \times n$-es nullmátrix (zérómátrix) az a mátrix, amelynek minden eleme 0:

$$Z_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

21. Tétel. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$-re teljesülnek a következők:

(1) $AE_n = E_n A = A$;
(2) $AZ_n = Z_n A = Z_n$.

2. Lineáris egyenletrendszerek

22. Definíció. Egy m egyenletből álló, n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

ahol $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$. Az egyenletrendszer felírható $A\underline{x} = \underline{b}$ alakban is, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix az egyenletrendszer (együttható)mátrixa, az egyenletrendszer bővített mátrixa pedig

$$A|\underline{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

2.1. Gauss-elimináció

23. Definíció. A bővített mátrix elemi átalakításai (az egyenletrendszer átalakításai):
(1) Két sor (egyenlet) felcserélése.
(2) Egy sor (egyenlet) szorzása egy tetszőleges nemnulla valós számmal.
(3) Valamelyik sorhoz (egyenlethez) egy másik sor (egyenlet) számszorosának hozzáadása.

24. Definíció. A bővített mátrix lépcsős alakú, ha bármely sorának első nullától különböző eleme alatt csak nullák állnak, továbbá minden sorban az első nem nulla elem hátrébb van, mint a megelőző sor első nem nulla eleme.

25. Tétel. Elemi átalakításokkal tetszőleges lineáris egyenletrendszer bővített mátrixa lépcsős alakra hozható.

26. Állítás. Egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha bővített mátrixának lépcsős alakjában ellentmondó sor szerepel, ami a következő alakú: $\big(0 \ldots 0|c\big)$, ahol $c \in \mathbb{R}$ és $c \neq 0$.

27. Definíció. A lineáris egyenletrendszer egy változóját szabad változónak nevezzük, ha tetszőlegesen felvehet valós számot értékként, különben a változót kötött változónak nevezzük.

2.2. Lineáris egyenletrendszer megoldásainak száma

1. eset: Ha a Gauss-elimináció során ellentmondó sort találunk, akkor **nincsen megoldás**.
2. eset: Ha van megoldás (azaz nincsen ellentmondó sor a Gauss-elimináció során), és van szabad változó, akkor **végtelen sok megoldás** van, hiszen a szabad változók tetszőleges valós számot felvehetnek értékként.
3. eset: Ha van megoldás, de nincs szabad változó, az akkor fordul elő, ha a bővített mátrix lépcsős alakjában pontosan annyi nem-0 sor van, mint ahány változó szerepel az egyenletrendszerben. Így minden változó kötött, azaz értékük egy-egy valós szám, így **pontosan egy megoldás** van.

3. Mátrixegyenletek

Mátrixegyenlet: $AX = B$, ahol $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$. A B oszlopvektoros formában $B = (\underline{b}_1 \ldots \underline{b}_k)$, ekkor a megoldást is oszlopvektoros formában keressük $X = (\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_k) \in \mathbb{R}^{n\times k}$.

$$AX = B \Leftrightarrow A(\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_k) = (\underline{b}_1 \ldots \underline{b}_k) \Leftrightarrow (A\underline{x}_1 \ldots A\underline{x}_k) = (\underline{b}_1 \ldots \underline{b}_k) \Leftrightarrow A\underline{x}_1 = \underline{b}_1, \ldots, A\underline{x}_k = \underline{b}_k.$$

28. Állítás. Legyen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X = (\underline{x}_1 \dots \underline{x}_k) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ és $B = (\underline{b}_1 \dots \underline{b}_k) \in \mathbb{R}^{m\times k}$. Az $AX = B$ mátrixegyenlet pontosan akkor oldható meg, ha az $A\underline{x}_i = \underline{b}_i$ $(1 \leq i \leq k)$ lineáris egyenletrendszerek megoldhatók. A megoldás Gauss-eliminációval számolható a következő bővített mátrixszal:

$$\big(A|B\big) = \big(A|\underline{b}_1 \dots \underline{b}_k\big)\,.$$

3.1. Mátrix inverze

29. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix inverze $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ha $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$.

30. Állítás. Bármely $n \times n$-es mátrixnak legfeljebb egy inverze van.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ha az $AX = E_n$ mátrixegyenlet megoldható, akkor $X = A^{-1}$. Ha nem oldható meg, akkor A-nak nincs inverze.