MTN113E: Azonosságok

(előadásvázlat)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Természetes számok, egész számok, racionális számok

1. Jelölés. A természetes számok (pozitív egész számok) halmazát jelölje $\mathbb{N}$, a nemnegatív egész számok halmazát $\mathbb{N}_0$. A jelölés eredete: „natural” (természetes).

2. Tétel (Teljes indukció tétele (1. alak)). Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha

- egyrészt $H(1)$ igaz,
- másrészt bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$ teljesüléséből következik $H(n+1)$ teljesülése,

akkor igaz a „bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$” állítás.

3. Tétel (Teljes indukció tétele (2. alak)). Legyen $H(n)$ egy n-től függő állítás. Ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $H(1)$, $H(2)$, $\dots$, $H(n-1)$ együttes teljesüléséből következik $H(n)$ teljesülése, akkor igaz a „bármely $n \in \mathbb{N}$-re $H(n)$” állítás.

4. Jelölés. Az egész számok halmazát jelölje $\mathbb{Z}$, a racionális számok halmazát $\mathbb{Q}$, a valós számok halmazát $\mathbb{R}$. A jelölések eredete: „Zahl” (szám), „quotient” (kvóciens, azaz hányados), „real” (valós).

5. Megjegyzés. Bármely racionális szám előáll két egész szám hányadosaként, az előállítás a következő feltételekkel egyértelművé tehető:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \text{lnko}(k, n) = 1 \right\},$$

ahol lnko(k, n) az k és n számok legnagyobb közös osztóját jelöli.

2. Algebrai azonosságok

6. Tétel. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$-re teljesülnek a következők:

(1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
(2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
(3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
(4) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

7. Megjegyzés. Az előző azonosságok általánosításával kapjuk a következő tételt.

8. Tétel (Binomiális tétel). Bármely $n \in \mathbb{N}$, és $a, b \in \mathbb{R}$-re

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n,$$

vagy rövidebben

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

9. Tétel (Polinomiális tétel). Bármely $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ esetén

$$(a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1+\ldots+i_k=n}} \frac{n!}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_k!} \cdot a_1^{i_1} \cdot a_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{i_k}.$$

10. Tétel. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $a, b \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következők:

(1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
(2) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
(3) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;
(4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
(5) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \cdots + a^2b^{2n-2} - ab^{2n-1} + b^{2n})$.

3. Hatványozás azonosságai

11. Definíció. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, az *a n-edik hatványán* az $a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ db}}$ szorzatot értjük.

12. Definíció. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén (ha n páros, akkor $a \geq 0$ estén értelmezhető) *a n-edik gyöke* az a valós szám, amelynek n-edik hatványa a, azaz $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ teljesül.

13. Definíció. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{Z}$ esetén

(1) $a^0 = 1$;
(2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$;
(3) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, ha n páros, akkor $a \geq 0$ esetén értelmezhető;
(4) $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.

14. Tétel. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ és $q, p \in \mathbb{Q}$ esetén (ha a racionális kitevőnek az 5. megjegyzésben leírt előállításában a nevező páros, akkor a hatvány csak nemnegatív alap esetén értelmezhető)

(1) $a^q a^p = a^{q+p}$;
(2) $(ab)^q = a^q b^q$;
(3) $(a^q)^p = a^{qp}$.