4. Feladatsor - Vektorok

4.1. Feladat. Döntsük el, hogy igazak-e a következő állítások. Ha igaz, indokoljuk, ha nem igaz, adjunk ellenpéldát.

(a) Az egyelemű vektorrendszer mindig lineárisan független.
(b) Ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor minden vektor előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
(c) Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor nincs olyan vektor, ami előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként.
(d) Ha $\mathbb{R}^3$-ben három vektor lineárisan függő vektorrendszert alkot, akkor egy egyenesbe esik.
(e) Ha $\mathbb{R}^3$-ben három vektor egy egyenesbe esik, akkor lineárisan függő vektorrendszert alkot.
(f) $\mathbb{R}^3$-ben bármely 4-elemű vektorrendszer lineárisan függő.

4.2. Feladat. Előáll-e a v_1 és a v_2 vektorok lineáris kombinációjaként a v_3 vektor?

(a) $v_1 = (1,\ -2,\ 3),\ v_2 = (-4,\ 7,\ -10),\ v_3 = (3,\ -4,\ 5);$
(b) $v_1 = (2,\ 0,\ 4),\ v_2 = (-1,\ 2,\ -4),\ v_3 = (4,\ -3,\ 12);$
(c) $v_1 = (1,\ 0,\ 1,\ -2),\ v_2 = (-4,\ 2,\ -2,\ 2),\ v_3 = (3,\ -1,\ 3,\ -3);$
(d) $v_1 = (-1,\ 1,\ 0,\ -3),\ v_2 = (4,\ -5,\ -2,\ 13),\ v_3 = (2,\ 0,\ 4,\ 4).$

4.3. Feladat. Döntsük el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben.

(a) $V = \mathbb{R}^2;\quad v_1 = (-2,\ 4),\ v_2 = (1,\ -2);$
(b) $V = \mathbb{R}^3;\quad v_1 = (1,\ 2,\ 1),\ v_2 = (1,\ -1,\ 1),\ v_3 = (1,\ 1,\ 0);$
(c) $V = \mathbb{R}^3;\quad v_1 = (1,\ -2,\ 4),\ v_2 = (2,\ -3,\ 1),\ v_3 = (-4,\ 5,\ 5);$
(d) $V = \mathbb{R}^4;\quad v_1 = (1,\ -2,\ 3,\ 4),\ v_2 = (0,\ -3,\ 1,\ 2),\ v_3 = (2\ -4,\ 5,\ 9);$
(e) $V = \mathbb{R}^5;\quad v_1 = (1,-2,0,3,1),\ v_2 = (0,0,2,4,-2),\ v_3 = (3,0,0,-3,-3),$ $v_4 = (-1,-1,0,3,2).$

4.4. Feladat. Legyenek u, v és w lineárisan független vektorok valamely valós vektortérben. Mit mondhatunk az alábbi vektorok lineáris függetlenségéről?

(a) $u + v,\ u - v,\ u - 2v + w;$
(b) $u + 2v,\ u + 2w,\ -2v + w;$
(c) $u + 3v + 2w,\ 2u + w,\ u + v + w.$

4.5. Feladat. Adjunk meg maximális lineárisan független részrendszert a következő vektorrendszerekben.

(a) $V = \mathbb{R}^3,\ (1,-1,2),(1,1,1),(0,1,2),(1,-2,1);$
(b) $V = \mathbb{R}^3,\ (1,-1,0),(1,1,1),(1,-3,-1);$
(c) $V = \mathbb{R}^3,\ (1,2,-1),(-1,1,1),(1,2,0);$
(d) $V = \mathbb{R}^4,\ (1,-1,1,1),(0,1,2,1),(1,1,1,0),(-1,2,1,0).$

4.6. Feladat. Határozzuk meg a v_1 és v_2 vektorok által bezárt szöget.

(a) $v_1 = (1,\ \sqrt{3}),\ v_2 = (\sqrt{3},\ 1);$
(b) $v_1 = (1,\ -1,3),\ v_2 = (5,\ 2,\ -1);$
(c) $v_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}),\ v_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2});$
(d) $v_1 = (1,\ 0),\ v_2 = (\sqrt{2},\ \sqrt{2}).$

4.7. Feladat. Ortogonálisak-e a következő mátrixok?

(a) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.8. Feladat. Hajtsuk végre a Gram-Schmidt-ortogonalizációt az alábbi lineárisan független $\mathbb{R}^n$-beli vektorrendszereken!

(a) $u_1 = (4, 4),\ u_2 = (0, 4)$;
(b) $u_1 = (1, 0, 0),\ u_2 = (2, 3, 0),\ u_3 = (1, 6, 1)$;
(c) $u_1 = (1, 6, 1),\ u_2 = (1, 0, 0),\ u_3 = (2, 3, 0)$;
(d) $u_1 = (1, 1, -1, 1),\ u_2 = (2, 1, -1, 0),\ u_3 = (3, -1, 3, 1)$.

Szorgalmi feladatok

4.9. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak az $\mathbb{R}^4$ vektortérben a $v_1 = (1, -4, 3, 2),\ v_2 = (-1, 4, -2, -4),\ v_3 = (3 - 12, x, 10)$ vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert.

4.10. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak az $\mathbb{R}^4$ vektortérben a $v_1 = (1,\ -1,\ 2,\ 1),\ v_2 = (1,\ 1,\ x,\ 2),\ v_3 = (-2,\ 0\ x,\ -3)$ vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert.

4.11. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak az $\mathbb{R}^4$ vektortérben a $v_1 = (1,\ x,\ -1,\ 2),\ v_2 = (2,\ -1,\ x,\ 5),\ v_3 = (1,\ 10\ -6,\ 1)$ vektorok lineárisan függő, illetve lineárisan független vektorrendszert.

4.12. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ olyan vektorrendszer, amelyben pontosan egy olyan vektor van, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként. Igazoljuk, hogy ez a vektor a nullvektor.

4.13. Feladat. Adjuk meg a $v_1 = (4,\ -1,\ 3,\ -2), v_2 = (8,\ -2,\ 6,\ -4),\ v_3 = (3,\ -1,\ 4,\ -2),\ v_4 = (6,\ -2,\ 8,\ -4)$ vektorrendszer összes maximális lineárisan független részrendszerét.

4.14. Feladat. Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ben olyan 3 hosszú vektort, amely merőleges a v vektorra.

(a) $v = (-1,\ 1,\ 0)$;
(b) $v = (1,\ 4,\ 2)$.