# 3. Feladatsor - Mátrixok, lineáris egyenletrendszerek

**3.1. Feladat.** Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő mátrixokat: $A+B$, $3A$, $B^T$, $BC$, $AC$.

**3.2. Feladat.** Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek).

$$AB, BA, CB, BC, DC, CD, EB^T, BF, E^T A,$$
$$F^2, D^T C^T, (A+B)C, (A+B^T)D, AD + B^T D$$

**3.3. Feladat.** Számítsa ki az $f$ polinom helyettesítési értékét az $A$ helyen, ha

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(b) $f(x) = x^2 + 3x - 4,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

**3.4. Feladat.** Számítsuk ki az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix $n$-edik hatványát.

**3.5. Feladat.** Oldjuk meg Gauss-elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket.

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array};$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array};$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array};$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 14 \end{array};$$

$$\text{(e)}\quad \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & + & 13x_5 & = & 9 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array}.$$

**3.6. Feladat.** Adjuk meg a következő mátrixok inverzét.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

**3.7. Feladat.** Oldjuk meg a következő mátrixegyenleteket.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & -8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

(f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 4 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$;

(g) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 12 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -14 & 4 \end{pmatrix}$.

## Szorgalmi feladatok

**3.8. Feladat.** Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Adjuk meg az összes olyan $B$ mátrixot, amely $A$-val felcserélhető, azaz $AB = BA$ teljesül!

**3.9. Feladat.** Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix $n$-edik hatványát.

**3.10. Feladat.** Számítsuk ki az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix $n$-edik hatványát.

**3.11. Feladat.** Határozzuk meg az összes olyan $2 \times 2$-es valós mátrixot, amelynek négyzete a nullmátrix.

**3.12. Feladat.** Oldjuk meg (az $a$ paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & +(a^2-8)x_3 & = & a+4 \end{array}$$

**3.13. Feladat.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ahol $a, b, c$ valós paraméterek.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & c \end{array}$$

**3.14. Feladat.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ahol $a$ valós paraméter.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 3 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

**3.15. Feladat.** Létezik-e olyan $m$ egyenletből álló $n$ ismeretlenes valós egyenletrendszer, melyre

a) $n > m$ és nincs megoldás;
b) $m > n$ és pontosan egy megoldás van;
c) $n > m$ és pontosan egy megoldás van;
d) $n = m$ és végtelen sok megoldás van.

Ha létezik, adjunk rá példát, ha nem létezik bizonyítsuk!

**3.16. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

**3.17. Feladat.** Oldjuk meg az $AX = E$ mátrixegyenletet, ahol $A$ az alábbi $n \times n$-es mátrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

**3.18. Feladat.** Oldjuk meg (az $a$ paraméter függvényében) az alábbi mátrixegyenletet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & a^2+5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ a+5 & -4 \end{pmatrix}.$$

**3.19. Feladat.** Oldjuk meg az $AX^{-1}B - C = AX^{-1}$ mátrixegyenletet, ahol $A, B, C$ az alábbi mátrixok.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$