2. Feladatsor - Számelmélet

2.1. Feladat. Határozzuk meg, hogy a következő számok közül melyik osztója melyiknek. Ábrázoljuk is!

(a) $2, 3, 4, 5, 6, 12$;
(b) $2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14$;
(c) $0, 1, 2, 3, 6, 11$;
(d) $2, 3, 5, 6, 10, 15, 18, 60, 180$;
(e) $2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 32, 128, 256, 342$;

2.2. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok és $2a + 9b$ osztható 17-tel, akkor $33a + 89b$ is osztható 17-tel.

2.3. Feladat. Igaz-e, hogy ha egy négyjegyű szám számjegyeit fordított sorrendben felírjuk, és az eredeti számmal összeadjuk, akkor az összeg osztható 11-gyel.

2.4. Feladat. Igaz-e, hogy bármely 3-mal nem osztható egész szám négyzetéből 1-et levonva 3-mal osztható számot kapunk?

2.5. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám nem osztható 5-tel, akkor a négyzetéhez 1-et hozzáadva vagy levonva 5-tel osztható számot kapunk.

2.6. Feladat. Legyen a természetes szám. Teljesül-e, hogy ha egy szám osztója a^2-nek, akkor a-nak is osztója?

2.7. Feladat. Adjuk meg azt a 3 legkisebb egymás után következő természetes számot, amelynek összege négyzetszám és egyben köbszám.

2.8. Feladat. Teljesülnek-e a következő oszthatóságok?

(a) $15 \mid 2^{16} - 1$;
(b) $17 \mid 2^{16} - 1$;
(c) $6 \mid 17^n - 11^n$ $(n \in \mathbb{N})$;
(d) $30 \mid n^5 - n$ $(n \in \mathbb{N})$;
(e) $3 \mid 2 \cdot 7^n - 2$ $(n \in \mathbb{N})$;
(f) $9 \mid 7^n + 3n - 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

2.9. Feladat. Miért nem lehet egyszerre egész $\dfrac{n+1}{15}$ és $\dfrac{n+8}{21}$, ahol $n \in \mathbb{N}$?

2.10. Feladat. Milyen n egész számra lesz a $\frac{3n^2+6n+10}{n+2}$ egész szám?

2.11. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $1 + 2 + 3 \mid 1^n + 2^n + 3^n$ teljesül bármely páratlan n természetes szám esetén.

2.12. Feladat. Teljesül-e, hogy tetszőlegesen megadott nyolc darab különböző háromjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő különböző úgy, hogy ezeket egymás mellé írva, a kapott szám 7-tel osztható?

2.13. Feladat. Igaz-e, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul.

2.14. Feladat. Van-e olyan négyzetszám, amely

(a) 7-tel osztva 3-at ad maradékul;

(b) 8-cal osztva 3-at ad maradékul;
(c) 6-tal osztva 3-at ad maradékul.

2.15. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármely egész szám négyzetét 16-tal osztva, maradékul négyzetszámot kapunk.

2.16. Feladat. Osszuk el az a egész számot maradékosan b-vel.

(a) $a = 4683$, $b = 243$;
(b) $a = -15370$, $b = 495$;
(c) $a = 20967$, $b = -58$;
(d) $a = -3588$, $b = -256$.

2.17. Feladat. Osszuk el maradékosan az f polinomot a g polinommal.

(a) $f = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 5$, $g = x + 1$;
(b) $f = x^4 + x^3 - 5x^2 + 7x - 6$, $g = x^2 + 3x - 1$;
(c) $f = x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 3x - 2$, $g = x^2 + 2x + 1$;
(d) $f = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 9x + 3$, $g = 2x^2 - 4x + 2$.

2.18. Feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg legkisebb közös többszörösüket.

(a) $a = 78$, $b = 30$;
(b) $a = 368$, $b = 161$;
(c) $a = 539$, $b = 1001$;
(d) $a = -1253$, $b = -3241$;
(e) $a = -1183$, $b = 1573$.

2.19. Feladat. Megadhatók-e b és c egész számok úgy, hogy tetszőleges a egészre l.n.k.o$(a, b) \sim 1$ és l.n.k.o$(a, c) \sim a$ teljesüljön?

2.20. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$. Határozzuk meg az alábbi legnagyobb közös osztókat.

(a) l.n.k.o$(a, 2a + 1)$;
(b) l.n.k.o$(3a + 5, 7a + 12)$
(c) l.n.k.o$(11a + 5b, 13a + 6b)$;
(d) l.n.k.o$(3a^2 + 1, 4a^2 + 3)$.

2.21. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$. Ha $b \mid a$, akkor határozzuk meg a következő legnagyobb közös osztók lehetséges értékeit.

(a) l.n.k.o$(b, a - b)$;
(b) l.n.k.o$(b, 2a + 3b)$;
(c) l.n.k.o$(11a + 5b, 29a + 13b)$.

2.22. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbb{Z}$ és l.n.k.o$(a, b) \sim 5$, adjuk meg az alábbi legnagyobb közös osztók lehetséges értékeit.

(a) l.n.k.o$(a + b, a - b)$;
(b) l.n.k.o$(a + 2b, 4a - b)$.

2.23. Feladat. Mutassuk meg, hogy a következő számok összetett számok.

(a) $10^6 - 5^7$;
(b) $10^{100} - 7$;
(c) $4^{20} - 1$;
(d) 1000027;

(e) $1000\dots001$ (2012 darab 0);
(f) $1! + 2! + 3! + \dots + 100!$.

2.24. Feladat. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből állítsunk össze öt különböző prímszámot, hogy minden számjegyet pontosan egyszer használjunk fel.

2.25. Feladat. Az a egész szám értékét adjuk meg úgy, hogy a, $a+4$ és $a+14$ számok prímek legyenek.

2.26. Feladat. Adjuk meg az összes olyan a egész számot, amelyre a, $a+10$ és $a+14$ is prímszám.

2.27. Feladat. Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $8p^2+1$ is prím.

2.28. Feladat. Teljesül-e, hogy bármely 3-nál nagyobb prímszám négyzete 24-gyel osztva 1-et ad maradékul.

2.29. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prímszám valamely $n \in \mathbb{N}$-re, akkor n is prímszám.

2.30. Feladat. Teljesül-e, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímszámok összege osztható 12-vel?

2.31. Feladat. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, melyekre $2p-1$ és $2p+1$ ikerprímszám.

Szorgalmi feladatok

2.32. Feladat. **Extra** (A gyakorlatvezető osztja szét a hallgatók között.)
Adjunk szabályt a 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31 és 37 számokkal való oszthatóság eldöntésére. Bizonyítsuk is!

2.33. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$ teljesül bármely $n \in \mathbb{N}$-re.

2.34. Feladat. Van-e olyan 2013-ra végződő egész szám, amely osztható 53-mal?

2.35. Feladat. Adjuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, ami osztható 999-cel, de nem tartalmaz 9-es számjegyet.

2.36. Feladat. Melyik az az ötjegyű szám, mely egyenlő számjegyei szorzatának 45-szörösével?

2.37. Feladat. (A **2.11.** feladat általánosítása.) Teljesül-e a tetszőleges páratlan n természetes szám esetén a következő:

$$1 + 2 + \dots + m \mid 1^n + 2^n + \dots + m^n \quad (m \in \mathbb{N}).$$

2.38. Feladat. Tudjuk, hogy 10 (nem feltétlenül különböző) természetes szám összege 1001. Határozzuk meg ezen számok legnagyobb közös osztójának lehetséges legnagyobb értékét.

2.39. Feladat. Melyik az a két természetes szám, amelyek legnagyobb közös osztója 6, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmusban 3 maradékos osztást végeztünk, ahol a hányadosok egymás utáni természetes számok voltak (növekvő sorrendben), és a hányadosok összege 9.

2.40. Feladat. Adjunk meg végtelen sok $a, b \in \mathbb{N}$ számpárt úgy, hogy a rajtuk végrehajtott euklideszi algoritmus 3 lépésből álljon (azaz a 2. osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot), és $\mathrm{l.n.k.o}(a, b) = 1$ teljesüljön.

2.41. Feladat. Keressük meg azokat a legkisebb a és b ($a > b$) természetes számokat, melyekhez tartozó euklideszi algoritmus 6 lépésből áll (azaz az 5. osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot). Általánosítsuk n lépésre.

2.42. Feladat. Igaz-e, hogy bármely természetes szám egy számjegyének megváltoztatásával prímszámmá alakítható?

2.43. Feladat. Az $a^2 + a + 41$ kifejezés prímszám, ha $a = 1, 2, 3, \ldots, 30$. Igaz-e, hogy $a^2 + a + 41$ minden a természetes számra prímszám?

2.44. Feladat. Két prímszám különbsége 100. Egymás után írva őket újabb prímszámot kapunk. Melyek ezek a számok?

2.45. Feladat. Legyen m és n természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{m^3+n^3}{2}$ prímszám, akkor $3m^2 - 6m + 4$ és $3n^2 - 6n + 4$ is az.

2.46. Feladat. Legyen p prímszám, és jelölje A azt a halmazt, ami p darab egymás után következő természetes számot tartalmaz. Fel lehet-e bontani az A halmazt két diszjunkt részhalmazra, amelynek egyesítése kiadja A-t, és a két halmazban lévő számok szorzata egyenlő.

2.47. Feladat. Határozzuk meg, hogy a $101 \cdot 102 \cdot 103 \cdot \ldots \cdot 200$ szorzat prímtényezős felbontásában a 2 hanyadik hatványon szerepel.