1. Feladatsor - Algebrai azonosságok

1.1. Feladat. Bizonyítsuk be teljes indukció segítségével, hogy bármely n természetes számra az $n^3 - n$ különbségnek a 6 mindig osztója.

1.2. Feladat. Bizonyítsuk be teljes indukció segítségével, hogy bármely n természetes számra

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

1.3. Feladat. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely $n \in \mathbb{N}$-re $a^{n-1} = 1$, ahol a tetszőleges pozitív valós szám.

Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$.

Ha feltesszük, hogy a tétel igaz $n = 1, 2, \ldots, k$ esetre, akkor $k+1$-re a következőt kapjuk:

$$a^{(k+1)-1} = a^k = \frac{a^{k-1} \cdot a^{k-1}}{a^{k-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

Tehát az állítás igaz $k+1$-re is.

1.4. Feladat. Végezzük el a hatványozást.

(a) $(3x+4)^2$;
(b) $(y^3 - 7)^2$;
(c) $(2x^4 - 3y)^2$;
(d) $(2x+3)^3$;
(e) $(y^2 - 2)^3$;
(f) $(xy^2 + 2y^3)^3$;
(g) $(x^k + 3y^{2k})^3$, $(k \in \mathbb{N})$.

1.5. Feladat. Határozzuk meg a következő hatványokat.

(a) $(x+2y)^4$;
(b) $(2x - \frac{3}{x})^4$;
(c) $(2x^2 + xy)^5$;
(d) $(2x + 3y^2 - z)^2$;
(e) $(x - y + z)^3$;
(f) $(x + y - 2z + u)^2$.

1.6. Feladat. Adjuk meg az f kifejezésekben a t együtthatóját.

(a) $f = (-x+2)^6, \quad t = x^4$;
(b) $f = (y-1)^8, \quad t = y^6$;
(c) $f = (3x - 2y + 2u - 3v)^5, \quad t = vy^4$;
(d) $f = (-x - 3c + u + 2y)^6, \quad t = x^2uy^3$

1.7. Feladat. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

(a) $x^6y^2 - u^4v^4$;
(b) $x^8 - y^4$
(c) $x^3 + 8$;
(d) $y^5 + 3^5$;
(e) $x^{3k} - x^{2k}$, $(k \in \mathbb{N})$;
(f) $a^6 + b^6$;

(g) $64 - 96a + 48a^2 - 8a^3$.

1.8. Feladat. Számítsuk ki a következő hatványok értékét.

(a) $16^{\frac{3}{2}}$;

(b) $\left(\dfrac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}}$;

(c) $32^{1,2}$;

(d) $27^{-\frac{4}{3}}$;

(e) $0,0625^{-\frac{3}{4}}$.

1.9. Feladat. Adjuk meg a következő kifejezések értelmezési tartományát. Írjuk fel racionális kitevőjű hatványként a kifejezéseket.

(a) $\dfrac{\sqrt[3]{y}\sqrt[4]{y}}{\sqrt{y}}$;

(b) $\dfrac{\sqrt{u}\sqrt{u}}{\sqrt[4]{u^7}}$;

(c) $\dfrac{\sqrt[3]{b^2}\sqrt[4]{b^5}}{\sqrt[4]{b^3}}$;

(d) $\dfrac{\sqrt[4]{y^3}y^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{8}}}{\sqrt{\sqrt[4]{y}}\sqrt{y^{-3}}}$.

(e) $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^2}}$;

(f) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}$;

(g) $\sqrt[3]{x^4\sqrt[6]{x\sqrt{x^7}}}$;

(h) $\sqrt[5]{y^4\sqrt[3]{y^4\sqrt[7]{y^3}}}$;

Szorgalmi feladatok

1.10. Feladat. Hol a hiba a következő bizonyításban?

Állítás: Bármely $n \in \mathbb{N}$-re

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

Bizonyítás: Ha $n = 1$, akkor $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{1\cdot 2}$.
Tegyük fel, hogy a tétel igaz $n = k$ esetre, ekkor $k+1$-re a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)\cdot k} + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1}.$$

Tehát az állítás igaz $k+1$-re is.

1.11. Feladat. Mi a $\left(3x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$ kifejezésben a konstans tag a hatványozás elvégzése és a rendezés után?

1.12. Feladat. Mi lesz x^{18} együtthatója az $(1 + x^3 - x^4)^{12}$ polinomban a hatványozás elvégzése és a rendezés után?

1.13. Feladat. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést, ahol $x, a \in \mathbb{R}^+$, $x \neq a$

$$\left[\left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}\right)^{-1} + \left(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2} \cdot \frac{4\sqrt{x} + 4\sqrt{a}}{x - a}.$$