HÁLÓK ÉS INVARIÁNSOK

(LATTICES AND INVARIANTS)

Szeged, 2005. június 27.

2. Küszöbfüggvények invarianciacsoportja

Egy Boole-függvényt *küszöbfüggvénynek* nevezünk, ha alkalmas $w_1, ..., w_n$, t valós számokra

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ akkor és csak akkor, ha} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq t.$$

Itt w_i-t az x_i változó *súlyának* ($i = 1, 2, \ldots, n$), a t-t pedig *küszöbértéknek* nevezzük.

2.1. TÉTEL ([Ho1]). *Bármely n változós f küszöbfüggvényhez létezik* $\mathbf{n}= \{1, 2, \ldots, n\}$*-nek olyan C_f osztályozása, hogy f invarianciacsoportja pontosan S_n azon permutációiból áll, amelyek C_f minden blokkját megőrzik. Megfordítva:* $\mathbf{n}$ *bármely C osztályozásához létezik olyan f_C küszöbfüggvény, hogy $C = C_{f_C}$.*

2.1. Korollárium ([Ho1]). *Bármely küszöbfüggvény invarianciacsoportja szimmetrikus csoportok direkt szorzatával izomorf.*

3. Teljességi tételek bizonyítása függvény-reláció dualitás segítségével

Tekintsük a k változós relációkat egyváltozós r: $\mathbf{k} \to A$ ($\mathbf{k} = \{1, 2, \ldots, k\}$) függvények halmazának. Azt mondjuk, hogy egy k változós D reláció *diagonális,* ha létezik egy olyan ρ_D ekvivalenciareláció $\mathbf{k}$ -n, hogy

$$D = \{r\colon \mathbf{k} \to A \mid r(u) = r(v), \text{ ha } u\rho_D v, \ u, v \in \mathbf{k}\}.$$

Az A-n definiálható diagonális relációk összessége alkotja a minimális relációklónt.

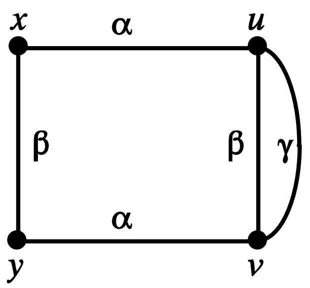
3.1. Állítás (Bodnarčuk–Kalužnin–Kotov–Romov [BKKR], Geiger [Gei], Krauss [Kr1], [Kr2]). *Egy* $\mathbf{A} = (A, F)$ *algebra pontosan akkor primál, ha minden olyan reláció diagonális, amelyet minden* F*-beli reláció megőriz.*

3.1. TÉTEL (Słupecki [Sl]). Legyen A véges halmaz úgy, hogy $|A| > 2$. Ha F tartalmaz egy f lényeges műveletet és az összes egyváltozós műveletet, akkor az $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra primál.

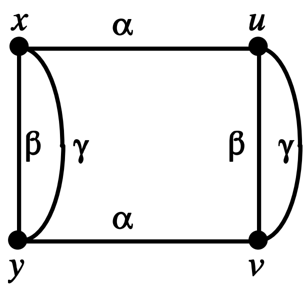
Módszerünkkel be tudjuk bizonyítani a ternáris diszkriminátor , a duális diszkriminátor ($|A| \geq 3$ esetén), az n-változós ($n \geq 3$) majdnem-projekciók függvényteljességét, valamint Foster teljességi tételét.

4. Diagrammsémák

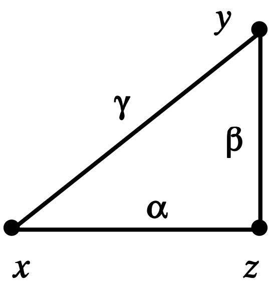
Shifting Lemma (Gumm):
$x, y, u, v \in \mathbf{A}$,
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Con\,A}$,
$\alpha \cap \beta \subseteq \gamma$,
$(x, u), (y, v) \in \alpha$, $(x, y), (u, v) \in \beta$, $(u, v) \in \gamma$
esetén
$(x, y) \in \gamma$.



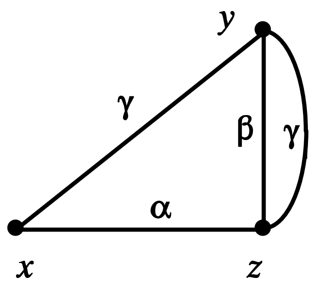
$$\alpha \cap \beta \subseteq \gamma \Longrightarrow$$



Háromszög Lemma (Chajda):
$x, y, z \in \mathbf{A}$,
$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Con\ A}$,
$\alpha \cap \beta \subseteq \gamma$
$(x, y) \in \gamma, (x, z) \in \alpha(z, y) \in \beta$
esetén
$(y, z) \in \gamma$.

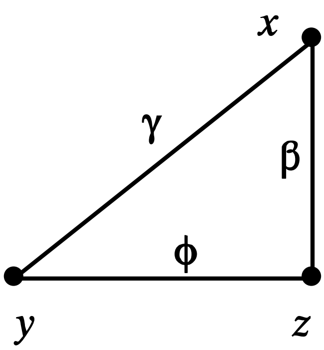


$$\overset{\alpha \cap \beta \subseteq \gamma}{\Longrightarrow}$$

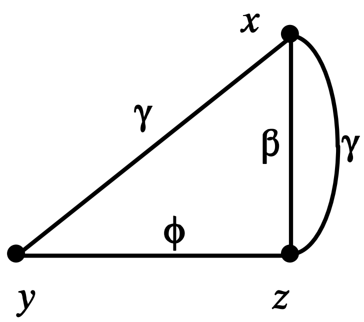


4.3. Definíció. Egy $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra kielégíti a *Háromszög Elvet,* ha bármely Φ toleranciára, és β, γ kongruenciára az ábrán látható implikáció teljesül.

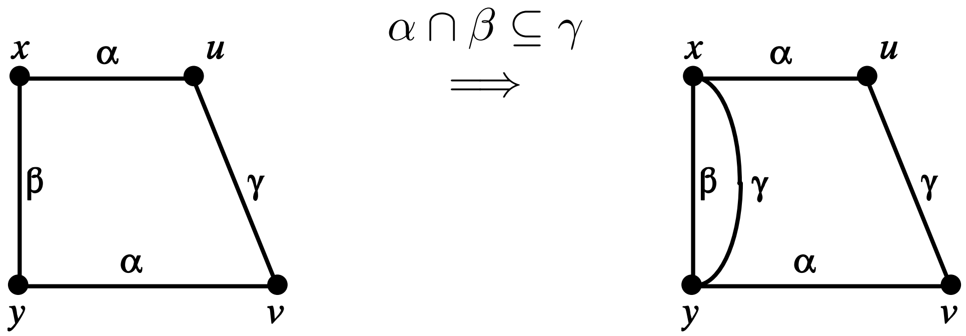
4.3. TÉTEL ([ChH1]). *Kongruencia-disztributív varietásban (azaz az ilyen varietások algebráiban) teljesül a Háromszög Elv.*



$$\overset{\Phi \cap \beta \subseteq \gamma}{\Longrightarrow}$$



Trapéz Lemma : bármely $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Con\,A}$ esetén (ahol $\mathbf{A} = (A, F)$ egy algebra), ha $\alpha \cap \beta \subseteq \gamma$, $(x, u), (y, v) \in \alpha$, $(x, y) \in \beta$ és $(u, v) \in \gamma$, akkor $(x, y) \in \gamma$. A Trapéz Lemma az ábrán látható.



A *Trapéz Elvet* hasonlóan definiáltuk, az egyetlen eltéres, hogy α helyett Φ szerepel, amely egy tetszőleges *tolerancia* az $\mathbf{A}$ algebrában.

4.4. TÉTEL ([CCH1]). *Legyen $\mathcal{V}$ algebrák egy varietása. Ekkor a következő öt feltétel ekvivalens:*

(a) $\mathcal{V}$ kongruencia-disztributív;

(b) a Trapéz Elv teljesül $\mathcal{V}$-ben;

(c) a Trapéz Lemma teljesül $\mathcal{V}$-ben;

(d) a Téglalap Lemma és a Háromszög Lemma teljesül $\mathcal{V}$-ben;

(e) létezik olyan n pozitív egész, és léteznek olyan $d_0, d_1, \ldots, d_n$ négyváltozós kifejezések, hogy

(e1) $d_0(x, y, u, v) = x$, $\quad d_n(x, y, u, v) = y$,

(e2) $d_i(x, y, x, y) = d_{i+1}(x, y, x, y)$ ha i páros,

(e3) $d_i(x, y, z, z) = d_{i+1}(x, y, z, z)$ ha i páratlan, és

(e4) $d_i(x, x, y, z) = x$ bármely i-re

teljesül $\mathcal{V}$-ben.

5. Hálóazonosságok shiftje

Legyen

$$\lambda : \quad p(x_1, \ldots, x_n) \leq q(x_1, \ldots, x_n)$$

hálóazonosság. Ha y változó, akkor jelölje $S(\lambda, y)$ a

$$q(x_1, \ldots, x_n) \leq y \Longrightarrow p(x_1, \ldots, x_n) \leq y$$

formulát.

Legyen $y \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, azaz $y = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Ha $S(\lambda, x_i)$ ekvivalens λ-val, akkor $S(\lambda, x_i)$-t λ *shiftjének* nevezzük. Ha $S(\lambda, x_i)$ ekvivalens λ-val egy $\mathcal{V}$ varietáson belül, akkor azt mondjuk, hogy $S(\lambda, x_i)$ egy *shiftje λ-nak $\mathcal{V}$-ben.*

$$
\begin{aligned}
\zeta_0: &\quad (x+y(z+xy))(z+xy) \le y+(x+z(x+y))(y+z),\\
\zeta_1: &\quad x(xy+z(w+xyz)) \le xy+(z+w)(x+w(x+z)),\\
\zeta_2: &\quad (x+y)(x+z) \le x+(x+y)(x+z)(y+z),\\
\zeta_3: &\quad (x+yz)(z+xy) \le z(x+yz)+x(z+xy), \textit{ és}\\
\zeta_4: &\quad y(z+y(x+yz)) \le x+(x+y)(z+x(y+z)).
\end{aligned}
$$

5.2. TÉTEL ([CCH2]). *Az $S(\zeta_0, y)$, $S(\zeta_1, y)$, $S(\zeta_2, x)$, és $S(\zeta_3, y)$ rendre shiftjei a ζ_0, ζ_1, ζ_2 és ζ_3 hálóazonosságoknak. Ellenben ζ_4-nak nincsen shiftje.*

Egy **L** hálót n-disztributívnak nevezünk ($n \geq 1$), ha **L**-ben teljesül a

$$\mathrm{dist}_n: \quad \beta \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \leq \sum_{j=0}^{n} \left(\beta \sum_{i \in \{0,\ldots,n\} \setminus \{j\}} \alpha_i \right)$$

azonosság.

5.1. TÉTEL ([CCH2]). *$S(dist_n, \alpha_0)$ egy shiftje $dist_n$-nek a moduláris hálók varietásában. Azonban ha $n \geq 2$, akkor $dist_n$-nek nincs shiftje (az összes hálók varietásában).*

A Fano-azonosság a következő:

$$\chi_2: \quad (x+y)(z+t) \leq (x+z)(y+t) + (x+t)(y+z).$$

5.3. TÉTEL ([CCH2]). *A Fano-azonosságnak nincs shiftje — még a moduláris hálók varietásában sem.*

6. Toleranciák és toleranciahálók

Jelölje dist(x, y, z) a disztributív azonosságot:

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

mod(x, y, z) pedig a moduláris azonosságot:

$$x \wedge (y \vee (x \wedge z)) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Azt mondjuk, hogy dist(tol,tol,tol) teljesül **A**-ban, ha

$$\Gamma \wedge (\Phi \vee \Psi) \subseteq (\Gamma \wedge \Phi) \vee (\Gamma \wedge \Psi)$$

fennáll bármely $\Gamma, \Phi, \Psi \in \mathbf{Tol\,A}$ esetén, ahol a $\wedge$ közös rész képzést, $\vee$ pedig az unió tranzitív lezártját jelöli. Analóg módon értelmezzük mod(tol,tol,tol)-t.

6.1. TÉTEL ([CzH2]). Ha $\mathcal{V}$ kongruencia-disztributív (kongruencia-moduláris) varietás, akkor $\mathcal{V}$ minden algebrájában teljesül dist(tol,tol,tol) (mod(tol,tol,tol)).

Egy 0-elemes **L** hálót 0-*modulárisnak* nevezünk, ha nincs N_5-tel izomorf, 0_L-et tartalmazó részhálója.

Egy 0-val rendelkező **L** háló teljesíti az *általános diszjunktsági tulajdonságot* (GD) ha az $a \wedge b = 0$ és az $(a \vee b) \wedge c = 0$ egyenlőségekből következik az $a \wedge (b \vee c) = 0$.

Ha bármely $a \in \mathbf{L}$ esetén $\{x \in \mathbf{L} : \mathrm{a} \wedge \mathrm{x} = 0\}$-nak van legnagyobb eleme, akkor L-et *pszeudokomplementumos hálónak* nevezzük.

6.2. TÉTEL ([CHR]). *Legyen* **A** *a* $\mathcal{V}$ *kongruencia-moduláris varietás egy algebrája. Ekkor fennállnak a következők:*

(i) A h: $\mathbf{Tol\,A} \to \mathbf{Con\,A}$, $\Phi \mapsto \Phi^*$ *leképezés szürjektív hálóhomomorfizmus, és* **Tol A** 0-1 *moduláris háló, amely rendelkezik a (GD) tulajdonsággal.*

(ii) **Tol A** *pontosan akkor pszeudokomplementumos, ha* **Con A** *pszeudokomplementumos.*

6.3. TÉTEL ([CHR]). *Legyen* **A** *tetszőleges algebra. Ha* **A**-*n van többségi függvény, akkor:*

(i) **Tol A** *0-moduláris pszeudokomplementumos háló.*

(ii) A Γ *és a* Φ *pontosan akkor komplementumai egymásnak* **Tol A**-*ban, ha faktorkong-ruencia párt alkotnak* A-*ban.*

7. Kongruenciaháló-azonosságok Malcev-feltételei moduláris varietásokban

Azt mondjuk, hogy az **A** algebrában teljesül a *tolerancia-metszési tulajdonság* (angolul *tolerance intersection property,* amelynek a rövidítése TIP), ha az **A** bármely két Γ, Φ toleranciájára teljesül a következő:

$$\Gamma^* \cap \Phi^* = (\Gamma \cap \Phi)^*$$

ahol * tranzitív lezártat jelent.

7.3. TÉTEL. *Egy varietás pontosan akkor kongruencia-moduláris, ha minden algebrájában teljesül a TIP.*

Varietásra vonatkozó *erős Malcev-feltételnek* a következő alakú feltételt nevezzük: “léteznek olyan $h_0, \ldots, h_k$ kifejezések, amelyek kielégítik azonosságok egy Σ halmazát”, ahol k rögzített, és Σ független a tekintett algebrák típusától.

Malcev-feltétel alatt ”létezik olyan n természetes szám, hogy P_n teljesül” alakú feltételt értünk, ahol a P_n-ek erős Malcev-feltételek és P_n-ből következik P_{n+1} bármely n-re.

7.1. TÉTEL ([CzH3]). *Legyen $\lambda : p \leq q$ olyan hálóazonosság, hogy $\lambda \models_c$ modularitás. Ekkor bármely $\mathcal{V}$ varietásra a következő két feltétel ekvivalens:*

(a) Bármely $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebra esetén λ teljesül $\mathbf{A}$ kongruenciahálójában.

(b) $\mathcal{V}$ kielégíti a következő Malcev-feltételt: "létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_3 \subseteq q_n)$ és (D_n) teljesül".

7.4. TÉTEL ([CHL]). *Legyen* $p \subseteq q$ *egy (kongruenciákra vonatkozó) tartalmazási formula, ahol* q $\circ$*-mentes. (Azaz a* p *egy* $\{\cap, \vee, \circ\}$*-kifejezés és* q *pedig hálókifejezés.) Ekkor bármely* $\mathcal{V}$ *kongruencia-moduláris varietásra a következő feltételek ekvivalensek:*

(i) $p \subseteq q$ *teljesül* $\mathcal{V}$ *kongruenciáira,*
(ii) $p_2 \subseteq q$ *teljesül* $\mathcal{V}$ *kongruenciáira,*
(iii) $p_{2,2} \subseteq q$ *teljesül* $\mathcal{V}$ *kongruenciáira,*
(iv) A

$$(\exists n \geq 2) \bigl(M(p_2 \subseteq q_2 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_2)\bigr)$$

Malcev-feltétel (ahol $q_2 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_2$ *egy* n*-tényezős szorzatot jelöl) teljesül* $\mathcal{V}$*-ben.*

7.1. TÉTEL ([CzH3]). *Legyen $\lambda : p \leq q$ olyan hálóazonosság, hogy $\lambda \models_c$ modularitás. Ekkor bármely $\mathcal{V}$ varietásra a következő két feltétel ekvivalens:*

(a) Bármely $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebra esetén λ teljesül $\mathbf{A}$ kongruenciahálójában.

(b) $\mathcal{V}$ kielégíti a következő Malcev-feltételt: "létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_3 \subseteq q_n)$ és (D_n) teljesül".

7.2. Korollárium ([CHL]). *Legyen $\lambda : p \leq q$ olyan hálóazonosság, hogy $\lambda \models_c$ modularitás. Ekkor bármely $\mathcal{V}$ varietásra a következő három feltétel ekvivalens:*

(a) Bármely $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebra esetén λ teljesül $\mathbf{A}$ kongruenciahálójában.

(b') $\mathcal{V}$ kielégíti a következő Malcev-feltételt: "létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_2 \subseteq q_n)$ és (D_n) teljesül".

(c) $\mathcal{V}$ kielégíti a következő Malcev-feltételt: "létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_2 \subseteq q_2 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_2)$ (n szorzótényező) és (D_n) teljesül".