TÉZISEK

1. Bevezetés

A hálók nagyon fontos kísérőstruktúrák. Gyakran bukkannak fel az algebra különböző ágaiban. Egyszerűen áttekinthetők, de elég gazdagok ahhoz, hogy sokféle algebrai tulajdonságot jellemezzenek. Itt a hálók diagrammsémákkal és Malcev-feltételekkel kapcsolatban lépnek fel. Emellett hálóelméleti vizsgálatokat folytatunk a hálóazonosságok shiftjével kapcsolatban.

A matematikában hagyományosan az "**invariáns** valami olyan, ami változatlan marad transzformációk bizonyos halmazára nézve. Az 'invariánsnak lenni' tulajdonságot *invarianciának* nevezzük."(Wikipedia [Inv1].)

Az univerzális algebrában ezen szoros értelemben vett jelentésen túlmenően az 'invariáns' szó általánosabb jelentéssel is bír. Helyettesítsük a fent említett transzformációt (amely egy $A \to A$ leképezés, ahol A tetszőleges halmaz) az algebrai művelet fogalmával. Ily módon az **invariáns reláció** fogalmához érkezhetünk ([PK]).

2. Küszöbfüggvények invarianciacsoportja

Egy Boole-függvényt *küszöbfüggvénynek* nevezünk, ha alkalmas $w_1, ..., w_n$, t valós számokra

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \text{ akkor és csak akkor, ha} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq t.$$

Itt w_i-t az x_i változó *súlyának* ($i = 1, 2, \ldots, n$), a t-t pedig *küszöbértéknek* nevezzük.

A küszöbfüggvényeknek geometriai interpretációja is van. A $\{0, 1\}^n$ halmaz tekinthető az $\mathbf{R}^n$ Euklideszi térben kifeszített hiperkockának. Egy Boole-függvény a 2^n számú csúcs 0-val, vagy 1-gyel történő megjelölése. Küszöbfüggvény esetén az 1-gyel megjelölt csúcsok hipersíkkal választhatók el a 0-val megjelöltektől. Ezért a küszöbfüggvényeket lineárisan szeparálható függvényeknek is szokás nevezni ([Sh]).

A küszöbfüggvényeket érdemes lenne minél jobban megismerni, ugyanis egyrészt modellezhetők velük az idegsejtek, másrészt elektromos hálózattal olcsón valósíthatók meg.

2.1. TÉTEL ([Ho1]). *Bármely n változós f küszöbfüggvényhez létezik* $\mathbf{n}= \{1, 2, \ldots, n\}$-*nek olyan C_f osztályozása, hogy f invarianciacsoportja pontosan S_n azon permutációiból* *áll, amelyek C_f minden blokkját megőrzik. Megfordítva:* $\mathbf{n}$ *bármely C osztályozásához létezik olyan f_C küszöbfüggvény, hogy $C = C_{f_C}$.*

A bizonyítás a következő segédtételeken alapszik, és csak elemi megfontolásokat tartalmaz. Definiáljuk a $\sim$ relációt az $\mathbf{n}$ halmazon a következő módon: $i \sim j$ akkor és csak akkor, ha az $(i\ j)$ transzpozíció f-et invariánsan hagyja.

2.1. Állítás *A $\sim$ ekvivalenciareláció által definiált C_f osztályozás konvex.*

2.2. Állítás *Legyen $\gamma = (j_1\ j_2 \dots j_{k-1}\ l\ j_k \dots j_m) \in S_n$ egy $m+1$ hosszúságú ciklus úgy, hogy $j_s \in C_p$, $1 \le s \le m$, $l \in C_q$, $p \ne q$. Ekkor $\gamma \notin G$.*

2.1. Lemma ([Ho1]). *Ha egy $\beta \in S_n$ legalább két C_f-blokkból tartalmaz elemet, akkor $\beta \notin G$.*

2.2. Lemma [Ho1]). *Legyen $\pi \in S_X$ alakja $\pi = \pi_2\pi_1$, ahol $\pi_1, \pi_2 \in S_X$, és ahol $M(\pi_1) \cap M(\pi_2) = \emptyset$ és $\pi_1 \notin G$. Ekkor $\pi \notin G$.*

2.3. Állítás. Legyen $\pi \in S_X$, legyen $\pi = \gamma_1 \dots \gamma_r$ ahol a γ_i-k diszjunkt ciklusok. Ha létezik olyan γ_j, hogy $1 \le j \le r$ és $\gamma_j \notin G$, akkor $\pi \notin G$.

Érdemes megfogalmazni a következő korolláriumot:

2.1. Korollárium ([Ho1]). *Bármely küszöbfüggvény invarianciacsoportja szimmetrikus csoportok direkt szorzatával izomorf.*

3. Teljességi tételek bizonyítása függvény-reláció dualitás segítségével

Tekintsük a k változós relációkat egyváltozós $r\colon \mathbf{k} \to A$ ($\mathbf{k} = \{1, 2, \dots, k\}$) függvények halmazának. Azt mondjuk, hogy egy k változós D reláció *diagonális,* ha létezik egy olyan ρ_D ekvivalenciareláció $\mathbf{k}$ -n, hogy

$$D = \{r\colon \mathbf{k} \to A \mid r(u) = r(v),\ \text{ha } u\rho_D v,\ u, v \in \mathbf{k}\}.$$

Az A-n definiálható diagonális relációk összessége alkotja a minimális relációklónt.

A következő 3.1 Állítás, valamint a 3.1 és a 3.1' Lemmák segítségével új bizonyítások adhatók ismert teljességi tételekre. (Az értekezésben egy ilyen új bizonyítást részletezünk.)

3.1. Állítás (Bodnarčuk–Kalužnin–Kotov–Romov [BKKR], Geiger [Gei], Krauss [Kr1], [Kr2]). *Egy $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra pontosan akkor primál, ha minden olyan reláció diagonális, amelyet minden F-beli reláció megőriz.*

3.1. Lemma ([Ho2]). *Adott* $\mathbf{A} = (A, F)$ *algebra esetén a következő két feltétel ekvivalens:*

(i) Bármely $R \subseteq A^k$ *esetén az* $[R]$ *reláció diagonális.*

(ii) Bármely $x, y \in A^k$ *esetén az* $[x, y]$ *reláció diagonális.*

3.1′. Lemma ([Ho2]). *A következő három állítás ekvivalens:*

(i) Az $\mathbf{A} = (A, F)$ *algebra primál.*

(ii) Bármely $x, y, z \in A^k$ *esetén* $z \in [x, y]$, *ha*

$$((\forall u, v \in \mathbf{k})(x(u) = x(v) \wedge y(u) = y(v) \to z(u) = z(v))).$$

(iii) Bármely $k \geq 1$ $x, y, z \in A^k$, *és a* $\mathbf{k}$*-n definiált bármely* ρ *ekvivalenciareláció esetén ha* $\rho \supseteq \rho_x \cap \rho_y$, *akkor* $D_\rho \subseteq [x, y]$.

A 3.1. Lemma alapján egy teljességi tétel bizonyítása alkalmasan választott mátrixok vizsgálatára egyszerűsödik. Módszerünket Słupecki tételének bizonyításán szemléltetjük részletesen.

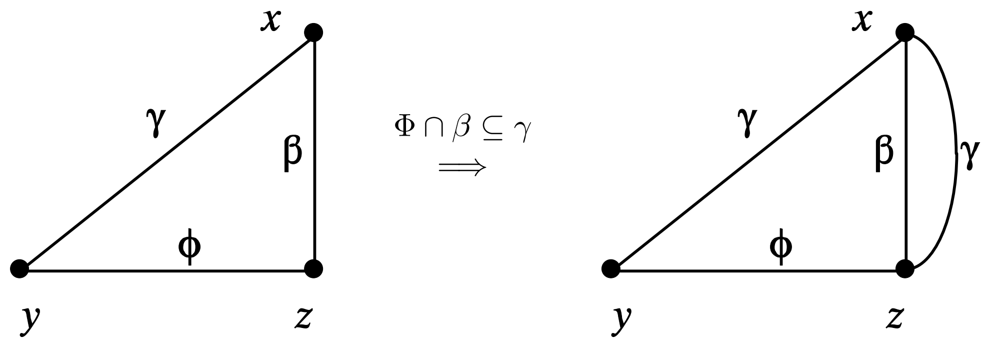
3.1. TÉTEL (Słupecki [Sl]). Legyen A véges halmaz úgy, hogy $|A| > 2$. Ha F tartalmaz egy f lényeges műveletet és az összes egyváltozós műveletet, akkor az $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra primál.

Módszerünkkel be tudjuk bizonyítani a ternáris diszkriminátor ([Sz]), a duális diszkriminátor ($|A| \geq 3$ esetén) ([FP]), az n-változós ($n \geq 3$) majdnem-projekciók ([Cs1]) függvényteljességét, valamint Foster ([F]) teljességi tételét.

4. Diagrammsémák

Gumm Shifting Lemmája ([Gu1]) azt állítja, hogy kongruencia-moduláris varietások szép, téglalap alakban felrajzolható diagrammsémát elégítenek ki. Ennek hatására Chajda ([ChH1], 4.2. Alfejezet) egy olyan háromszögsémát vizsgált, amely a kongruencia-disztributivitás következménye. A kongruencia-disztributív varietások nemcsak három tetszőleges kongruenciára, hanem egy toleranciára és két kongruenciára is kielégítik ezt a sémát, azaz Gumm Shifting (Téglalap) Elvének analógiája érvényes.

4.3. Definíció. Egy $\mathbf{A} = (A, F)$ algebra kielégíti a *Háromszög Elvet,* ha bármely Φ toleranciára, és β, γ kongruenciára az 1. Ábrán látható implikáció teljesül.

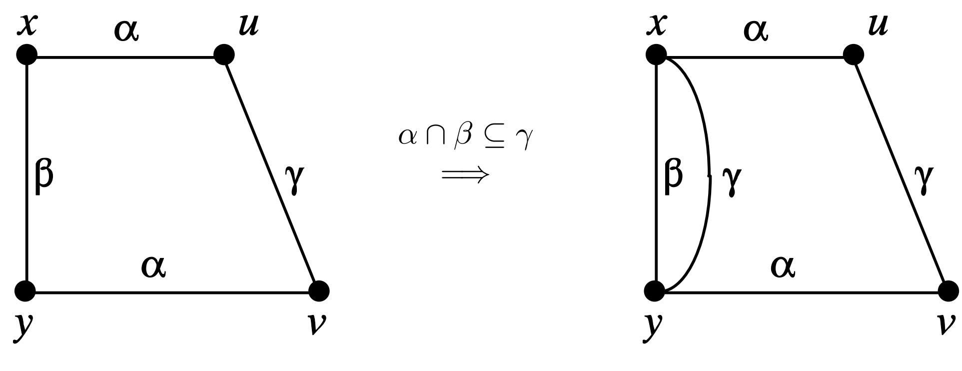


1. Ábra

4.3. TÉTEL ([ChH1]). *Kongruencia-disztributív varietásban (azaz az ilyen varietások algebráiban) teljesül a Háromszög Elv.*

Míg a háromszögsémáról nem ismert, hogy jellemzi-e a kongruencia-disztributivitást, egy trapézsémának nevezett megfelelő általánosításról megmutattuk, hogy igen ([CCH2], 4.3. Alfejezet).

A *Trapéz Lemmának* nevezett feltételt a következő módon vezetjük be: bármely $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Con\,A}$ esetén (ahol $\mathbf{A} = (A, F)$ egy algebra), ha $\alpha \cap \beta \subseteq \gamma$, $(x, u), (y, v) \in \alpha$, $(x, y) \in \beta$ és $(u, v) \in \gamma$, akkor $(x, y) \in \gamma$. A Trapéz Lemma a 2. ábrán látható.



2. Ábra

A *Trapéz Elvet* hasonlóan definiáltuk, az egyetlen eltéres, hogy α helyett Φ szerepel, amely egy tetszőleges *tolerancia* az $\mathbf{A}$ algebrában.

A következő 4.2 Állítás néhány összefüggést tár fel feltételeink között; algebrák varietásaira a 4.4. Tételben ezeknél többet tudunk állítani.

4.2. Állítás [(CCH1)]. *Legyen* $\mathbf{A}$ *tetszőleges algebra.*

(1) Ha **A** *kielégíti a Trapéz Lemmát (Trapéz Elvet), akkor kielégíti a Téglalap Lemmát és a Háromszög Lemmát (Téglalap Elvet és a Háromszög Elvet). Továbbá mindhárom elvből következik a megfelelő lemma teljesülése.*

(2) Ha **Con A** *disztributív, akkor* **A** *kielégíti a Trapéz Lemmát (és ily módon a másik két lemmát is).*

(3) Ha **A** *kielégíti a Trapéz Elvet, akkor* **Con A** *disztributív.*

(4) Ha **A** *kielégíti a Téglalap Elvet, akkor* **Con A** *moduláris ([Gu2], 4.2. Lemma).*

(5) Ha **A** *is kongruencia-felcserélhető, akkor* **Con A** *pontosan akkor disztributív, ha* **A** *kielégíti a Háromszög Lemmát ([CzH1], Cor. 2).*

4.4. TÉTEL ([CCH1]). *Legyen $\mathcal{V}$ algebrák egy varietása. Ekkor a következő öt feltétel ekvivalens:*

(a) $\mathcal{V}$ kongruencia-disztributív;

(b) a Trapéz Elv teljesül $\mathcal{V}$-ben;

(c) a Trapéz Lemma teljesül $\mathcal{V}$-ben;

(d) a Téglalap Lemma és a Háromszög Lemma teljesül $\mathcal{V}$-ben;

(e) létezik olyan n pozitív egész, és léteznek olyan $d_0, d_1, \ldots, d_n$ négyváltozós kifejezések, hogy

(e1) $d_0(x,y,u,v) = x, \quad d_n(x,y,u,v) = y$,

(e2) $d_i(x,y,x,y) = d_{i+1}(x,y,x,y)$ ha i páros,

(e3) $d_i(x,y,z,z) = d_{i+1}(x,y,z,z)$ ha i páratlan, és

(e4) $d_i(x,x,y,z) = x$ bármely i-re

teljesül $\mathcal{V}$-ben.

Ezek a példák mutatják, hogy kongruenciahálóbeli azonosságok, sőt Horn-formulák ([ChH2]) helyett időnként érdemes diagrammsémákban gondolkodni.

5. Hálóazonosságok shiftje

Legyen

$$\lambda : \quad p(x_1, \ldots, x_n) \leq q(x_1, \ldots, x_n)$$

hálóazonosság. (Megjegyezzük, hogy hálóazonosságon mindig egyenlőtlenséget értünk, azaz $\leq$-t használunk $=$ helyett.) Ha y változó, akkor jelölje $S(\lambda, y)$ a

$$q(x_1, \ldots, x_n) \leq y \Longrightarrow p(x_1, \ldots, x_n) \leq y$$

formulát. Ha $y \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, akkor λ nyilvánvalóan ekvivalens $S(\lambda, y)$-nal. Számunkra az az eset a legfontosabb, amikor $y \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, azaz $y = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Ekkor $S(\lambda, x_i)$ következménye λ-nak. Ha $S(\lambda, x_i)$ ekvivalens λ-val, akkor $S(\lambda, x_i)$-t λ *shiftjének* nevezzük. Ha $S(\lambda, x_i)$ ekvivalens λ-val egy $\mathcal{V}$ varietáson belül, akkor azt mondjuk, hogy $S(\lambda, x_i)$ egy *shiftje λ-nak $\mathcal{V}$-ben.* Ebben a fejezetben néhány ismert hálóazonosságról megmutatjuk, hogy van shiftje, néhány továbbiról pedig azt, hogy nincs.

Huhn ([Hu1] és [Hu2]) nyomán egy $\mathbf{L}$ hálót n-disztributívnak nevezünk $(n \geq 1)$, ha $\mathbf{L}$-ben teljesül a

$$\mathrm{dist}_n : \quad \beta \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \leq \sum_{j=0}^{n} \left(\beta \sum_{i \in \{0,\ldots,n\} \setminus \{j\}} \alpha_i \right)$$

azonosság.

5.1. TÉTEL ([CCH2]). *$S(dist_n, \alpha_0)$ egy shiftje $dist_n$-nek a moduláris hálók varietásában. Azonban ha $n \geq 2$, akkor $dist_n$-nek nincs shiftje (az összes hálók varietásában).*

A következő néhány hálóazonosság McKenzie ([Mc]) cikkében található:

$$\begin{aligned}
\zeta_0 : &\quad (x + y(z + xy))(z + xy) \leq y + (x + z(x + y))(y + z), \\
\zeta_1 : &\quad x(xy + z(w + xyz)) \leq xy + (z + w)(x + w(x + z)), \\
\zeta_2 : &\quad (x + y)(x + z) \leq x + (x + y)(x + z)(y + z), \\
\zeta_3 : &\quad (x + yz)(z + xy) \leq z(x + yz) + x(z + xy), \text{és} \\
\zeta_4 : &\quad y(z + y(x + yz)) \leq x + (x + y)(z + x(y + z)).
\end{aligned}$$

A ζ_3 a Gedeonová-féle p-modularitás ([Ged1]).

5.2. TÉTEL ([CCH2]). *Az $S(\zeta_0, y)$, $S(\zeta_1, y)$, $S(\zeta_2, x)$, és $S(\zeta_3, y)$ rendre shiftjei a ζ_0, ζ_1, ζ_2 és ζ_3 hálóazonosságoknak. Ellenben ζ_4-nak nincsen shiftje.*

A Fano-azonosság (Herrmann és Huhn ([HH])) a következő:

$$\chi_2 : \quad (x + y)(z + t) \leq (x + z)(y + t) + (x + t)(y + z).$$

5.3. TÉTEL ([CCH2]). *A Fano-azonosságnak nincs shiftje — még a moduláris hálók varietásában sem.*

6. Toleranciák és toleranciahálók

Jelölje $\mathrm{dist}(x, y, z)$ a disztributív azonosságot:

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$\mathrm{mod}(x, y, z)$ pedig a moduláris azonosságot:

$$x \wedge (y \vee (x \wedge z)) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Jelölje **Tol A** az **A** algebra toleranciáinak *halmazát,* **Con A** pedig az **A** algebra kongruenciáinak *hálóját.* Azt mondjuk, hogy dist(tol,tol,tol) teljesül **A**-ban, ha

$$\Gamma \wedge (\Phi \vee \Psi) \subseteq (\Gamma \wedge \Phi) \vee (\Gamma \wedge \Psi)$$

fennáll bármely $\Gamma, \Phi, \Psi \in$ **Tol A** esetén, ahol a $\wedge$ közös rész képzést, $\vee$ pedig az unió tranzitív lezártját jelöli. Analóg módon értelmezzük mod(tol,tol,tol)-t. Hangsúlyozzuk, hogy $\Phi \vee \Psi$ **nem** a **Tol A** hálóbeli egyesítést jelenti. Jónsson kifejezések ([J1]) segítségével bizonyítottuk a következő tételt:

6.1. TÉTEL ([CzH2]). Ha $\mathcal{V}$ kongruencia-disztributív (kongruencia-moduláris) varietás, akkor $\mathcal{V}$ minden algebrájában teljesül dist(tol,tol,tol) (mod(tol,tol,tol)).

Két fontos következmény:

6.1 Korollárium (Gumm [Gu1]). *Ha $\mathcal{V}$ kongruencia-moduláris varietás, akkor teljesül a Gummtól származó Shifting Elv, azaz bármely* **A**$\in \mathcal{V}$*-re, $\alpha, \gamma \in$* **Con A** *és $\Phi \in$* **Tol A** *esetén, ha $(x, y), (u, v) \in \alpha$, $(x, u), (y, v) \in \Phi$, $(u, v) \in \gamma$ és $\alpha \cap \Phi \subseteq \gamma$, akkor $(x, y) \in \gamma$.*

Jelöljük *-gal a tranzitív lezártat. A következő állítás lényeges lépés a 7. Fejezetben található Malcev-feltételek felé:

6.1. Állítás ([CzH2]). *Ha mod(tol,tol,tol) vagy dist(tol,tol,tol) teljesül egy* **A** *algebrában, akkor $\Gamma \cap \Phi^* \subseteq (\Gamma \cap \Phi)^*$ bármely $\Gamma, \Phi \in$* **Tol A** *esetén.*

Egy 0-elemes **L** hálót 0-*modulárisnak* nevezünk ([St]), ha nincs N_5-tel izomorf, 0_L-et tartalmazó részhálója. Egy 0-val rendelkező **L** háló teljesíti az *általános diszjunktsági tulajdonságot* (GD) ha az $a \wedge b = 0$ és az $(a \vee b) \wedge c = 0$ egyenlőségekből következik az $a \wedge (b \vee c) = 0$. Ha bármely $a \in$ **L** esetén $\{x \in \mathbf{L} : \mathrm{a} \wedge \mathrm{x} = 0\}$-nak van legnagyobb eleme, akkor L-et *pszeudokomplementumos hálónak* nevezzük.

A most következő 6.2. és 6.3. Tételek tartalmazzák legfontosabb eredményeinket a kongruencia-moduláris varietásbeli toleranciahálókról.

6.2. TÉTEL ([CHR]). *Legyen* **A** *a* $\mathcal{V}$ *kongruencia-moduláris varietás egy algebrája. Ekkor fennállnak a következők:*

(i) A h: **Tol A** $\to$ **Con A**, $\Phi \mapsto \Phi^*$ *leképezés szürjektív hálóhomomorfizmus, és* **Tol A** 0-1 *moduláris háló, amely rendelkezik a (GD) tulajdonsággal.*

(ii) **Tol A** *pontosan akkor pszeudokomplementumos, ha* **Con A** *pszeudokomplementumos.*

6.3. TÉTEL ([CHR]). *Legyen* **A** *tetszőleges algebra. Ha* **A***-n van többségi függvény, akkor:*

(i) **Tol A** *0-moduláris pszeudokomplementumos háló.*

(ii) A Γ *és a* Φ *pontosan akkor komplementumai egymásnak* **Tol A***-ban, ha faktorkongruencia párt alkotnak A-ban.*

7. Kongruenciaháló-azonosságok Malcev-feltételei moduláris varietásokban

Már 34 éves az a probéma, hogy ekvivalens-e minden kongruenciaháló-azonosság egyegy Malcev-feltétellel. Más szavakkal: azt mondjuk, hogy egy λ hálóazonosság jellemezhető Malcev-feltétellel, ha létezik olyan M Malcev-feltétel, hogy bármely $\mathcal{V}$ varietás esetén λ teljesülése $\mathcal{V}$-ben ekvivalens M-nek $\mathcal{V}$-beli teljesülésével; a kérdés pedig az, hogy jellemezhető-e minden hálóazonosság ilyen módon. A problémát először Grätzer vetette fel [Gr1]-ben, ahol a Malcev-feltétel fogalmát bevezette.

Varietásra vonatkozó *erős Malcev-feltételnek* a következő alakú feltételt nevezzük: "léteznek olyan $h_0, \ldots, h_k$ kifejezések, amelyek kielégítik azonosságok egy Σ halmazát", ahol k rögzített, és Σ független a tekintett algebrák típusától. *Malcev-feltétel* alatt "létezik olyan n természetes szám, hogy P_n teljesül" alakú feltételt értünk, ahol a P_n-ek erős Malcev-feltételek és P_n-ből következik P_{n+1} bármely n-re. A kérdést később többen is felvetették, például Taylor [T]), Jónsson ([J2]), továbbá Freese és McKenzie ([FM]).

Bizonyos hálóazonosságok esetén ismert a Malcev-feltétellel történő jellemzés. Az első két ilyen típusú eredmény a (kongruencia-)disztributivitás Jónsson-féle jellemzése az úgynevezett Jónsson-kifejezések segítségével, és a (kongruencia-)modularitás Day-féle jellemzése a Day-kifejezések segítségével. Mivel Day eredményét használjuk is, ezért azt itt most részletesen is kimondjuk.

Legyen $n \geq 2$, ekkor jelölje $(\mathbf{D}_n)$ a következő Malcev-feltételt: "léteznek olyan $m_0, \ldots, m_n$ négyváltozós kifejezések, amelyek kielégítik a következő azonosságokat:

$$m_0(x, y, z, u) = x, \qquad m_n(x, y, z, u) = u,$$

$$m_i(x,y,y,x)=x, \quad \text{ha } i=0,1,\dots,n,$$
$$m_i(x,x,y,y)=m_{i+1}(x,x,y,y), \quad \text{ha } i=0,1,\dots,n, \quad i \text{ páros},$$
$$m_i(x,y,y,z)=m_{i+1}(x,y,y,z), \quad \text{ha } i=0,1,\dots,n, \quad i \text{ páratlan."}$$

Day eredménye szerint egy $\mathcal{V}$ varietás pontosan akkor kongruencia-moduláris, ha a "$(\exists n)(\mathbf{D}_n)$" teljesül $\mathcal{V}$-ben.

A Jónsson-kifejezéseket és a Day-kifejezéseket hamarosan további hálóazonosságok jellemzése követte, például Gedeonová ([Ge2]) és Mederly ([Me]) eredményei, de Nation ([N]) és Day [(Da2]) megmutatta, hogy ezek a Malcev-feltételek ekvivalensek a Day-kifejezések és a Jónsson kifejezések létezésével ([J2], [FM]).

A következő mérföldkő a XIII. Fejezet Freese és McKenzie könyvében ([FM]). Az úgynevezett *keret-azonosságokkal* kapcsolatos eredmények egy ideig reményeket keltettek a probléma megoldására vonatkozóan, de Pálfy és Szabó ([PSz]) dolgozata lerombolta ezeket a reményeket.

A jelen fejezetben megmutatjuk, hogy minden olyan hálóazonosság, amelyből következik a kongruencia-modularitás, ekvivalens egy Malcev-feltétellel, amelyet ráadásul könnyű megkonstruálni.

Azt mondjuk, hogy a λ *hálóazonosságból következik a modularitás kongruencia-varietásokban,*azaz $\lambda \models_c$ mod, ha bármely $\mathcal{V}$ varietás esetén ha minden $\mathbf{Con}\,\mathbf{A}$ kongruenciahálóban ($\mathbf{A} \in \mathcal{V}$) teljesül λ, akkor minden ilyen kongruenciaháló moduláris.

Legyen adott a p hálókifejezés és legyen $k \geq 2$. Definiáljuk a p_k kifejezéseket indukcióval a következőképpen. H p változó, akkor legyen $p_k = p$. Ha $p = r \wedge s$, akkor legyen $p_k = r_k \cap s_k$. Végül ha $p = r \vee s$, akkor legyen $p_k = r_k \circ s_k \circ r_k \circ s_k \circ \dots$, amely k-tényezős szorzat. Ha kongruenciákat, vagy még általánosabban, reflexív kompatibilis relációkat helyettesítünk p_k változói helyére, akkor a $\cap$ közös rész képzésként és a $\circ$ relációszorzásként interpretálandó.

A Malcev-feltételekkel kapcsolatos első eredményünk a 7.1. Tétel.

7.1. TÉTEL ([CzH3]). *Legyen $\lambda : p \leq q$ olyan hálóazonosság, hogy $\lambda \models_c$ modularitás. Ekkor bármely $\mathcal{V}$ varietásra a következő két feltétel ekvivalens:*

(a) Bármely $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebra esetén λ teljesül $\mathbf{A}$ kongruenciahálójában.

(b) $\mathcal{V}$ kielégíti a következő Malcev-feltételt: "létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_3 \subseteq q_n$ és $(\mathbf{D}_n)$ teljesül".

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ algebrában teljesül a *tolerancia-metszési tulajdonság* (angolul *tolerance intersection property,* amelynek a rövidítése TIP), ha az $\mathbf{A}$ bármely két Γ, Φ

toleranciájára teljesül a következő:

$$\Gamma^* \cap \Phi^* = (\Gamma \cap \Phi)^*$$

ahol * tranzitív lezártat jelent. A 7.1. Tétel bizonyításában egyúttal a következőt is bebizonyítottuk:

7.2. TÉTEL ([CHL]). *Kongruencia-moduláris varietás minden algebrájában teljesül a TIP.*

A következőekben javítjuk a 7.1. Tételt oly módon, hogy megadjuk a λ-t jellemző legegyszerűbb (és ebben az értelemben a legjobb) Malcev-feltételt, amennyiben $\lambda \models_c$ modularitás.

Tetszőleges, a $\cap, \vee, \circ$ műveleti jelekből és változól felépülő $p = p(x_1, \dots, x_k)$ kifejezésre, röviden $\{\cap, \vee, \circ\}$-kifejezésre, és $n \geq 2$-re definiáljuk a p_n és a $p_{2,2}\{\cap, \circ\}$-kifejezéseket indukció segítségével a következő módon. Ha p változó, akkor legyen $p_n = p_{2,2} = p$. Ha $p = r \cap s$, akkor legyen $p_n = r_n \cap s_n$ és $p_{2,2} = r_{2,2} \cap s_{2,2}$. Hasonlóan, ha $p = r \circ s$, akkor legyen $p_n = r_n \circ s_n$ és $p_{2,2} = (r_{2,2} \circ s_{2,2}) \cap (s_{2,2} \circ r_{2,2})$. Végül, ha $p = r \vee s$, akkor legyen $p_n = r_n \circ s_n \circ r_n \circ s_n \circ \cdots$ amely n szorzótényezőt tartalmaz a jobb oldalon, és legyen $p_{2,2} = (r_{2,2} \circ s_{2,2}) \cap (s_{2,2} \circ r_{2,2})$.

7.4. TÉTEL ([CHL]). *Legyen $p \subseteq q$ egy (kongruenciákra vonatkozó) tartalmazási formula, ahol q $\circ$-mentes. (Azaz a p egy $\{\cap, \vee, \circ\}$-kifejezés és q pedig hálókifejezés.) Ekkor bármely $\mathcal{V}$ kongruencia-moduláris varietásra a következő feltételek ekvivalensek:*

(i) $p \subseteq q$ teljesül $\mathcal{V}$ kongruenciáira,

(ii) $p_2 \subseteq q$ teljesül $\mathcal{V}$ kongruenciáira,

(iii) $p_{2,2} \subseteq q$ teljesül $\mathcal{V}$ kongruenciáira,

(iv) A

$$(\exists n \geq 2)\bigl(M(p_2 \subseteq q_2 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_2)\bigr)$$

Malcev-feltétel (ahol $q_2 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_2$ egy n-tényezős szorzatot jelöl) teljesül $\mathcal{V}$-ben.

Korolláriumként mondjuk ki a 7.1. Tétel javítását:

7.2. Korollárium ([CHL]). *Legyen $\lambda : p \leq q$ olyan hálóazonosság, hogy $\lambda \models_c$ modularitás. Ekkor bármely $\mathcal{V}$ varietásra a következő három feltétel ekvivalens:*

(a) Bármely $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebra esetén λ teljesül $\mathbf{A}$ kongruenciahálójában.

(b') $\mathcal{V}$ kielégíti a következő Malcev-feltételt: "létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_2 \subseteq q_n)$ és $(\mathbf{D}_n)$ teljesül".

(c) $\mathcal{V}$ kielégíti a következő Malcev-feltételt: "létezik $n \geq 2$ úgy, hogy $M(p_2 \subseteq q_2 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_2)$ (n szorzótényező) és $(\mathbf{D}_n)$ teljesül".

REFERENCES

[BKKR] V. G. Bodnarčuk, L. A. Kalužnin, V. N. Kotov, B. A. Romov: Galois theory for Post algebras, I–II (Russian), *Kibernetika*, **5** (1969), 1–10; 1–9..

[CCH1] I. Chajda, G. Czédli, E. K. Horváth.: Trapezoid lemma and congruence distributivity, *Math Slovaca*, **53** (2003), No.3, 247–253.

[CCH2] I. Chajda, G. Czédli, E. K. Horváth: The shifting lemma and shifting lattice identities, *Algebra Universalis*, **50** (2003), 51–60.

[ChH1] I. Chajda, E. K. Horváth: A triangular scheme for congeruence distributivity, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **68** (2002), 29–35.

[ChH2] I. Chajda, E. K. Horváth: A scheme for congruence semidistributivity, *Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications*, **23** (2003), 13–18.

[Cs1] B. Csákány: Homogeneous algebras are functionally complete, *Algebra Universalis*, **11** (1980), 149–158.

[CzH1] G. Czédli, E. K. Horváth: Reflexive relations and Mal'tsev conditions for congruence lattice identities in modular varieties, *Acta Univ. Palacki Olomouc., Fac. rer. nat., Mathematica*, **41** (2002), 43–53.

[CzH2] G. Czédli, E. K. Horváth: Congruence distributivity and modularity permit tolerances, *Acta Univ. Palacki. Olomouc., Fac.rer.nat., Mathematica*, **41** (2002), 39–42.

[CzH3] G. Czedli, E. K. Horváth: All congruence lattice identities implying modularity have Malt'sev conditions, *Algebra Universalis*, **50** (2003), 69–74.

[CHR] G. Czédli, E. K. Horváth, S. Radeleczki: On tolerance lattices of algebras in congruence mudular varieties, *Acta Math. Hungar.*, **100 (1–2)** (2003), 9–17.

[CHL] G. Czédli, E. K. Horváth, P. Lipparini: Optimal Mal'tsev conditions for congruence modular varieties, *Algebra Universalis*, to appear.

[Da1] A. Day: A characterization of modularity for congruence lattices of algebras, *Canad. Math. Bull.*, **12** (1969), 167–173.

[Da2] A. Day: p-modularity implies modularity in equational classes, *Algebra Universalis*, **3** (1973), 398–399.

[F] A. L. Foster: An existence theorem for functionally complete universal algebras, *Math Z.*, **71** (1959), 69–82.

[FM] R. Freese, R. McKenzie: *Commutator theory for congruence modular varieties*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[Ge1] E. Gedeonová: Jordan-Hölder theorem for lines, *Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied.*, **22.** (1972), 177–198

[Ge2] E. Gedeonová: A characterization of p-modularity for congruence lattices of algebras, *Acta Fac. Rerum Natur. Univ Comenian. Math Publ.*, **28** (1972), 99–106.

[Gei] D. Geiger: Closed systems of functions and predicates, *Pacific J. Math.*, **27** (1968), 95–100.

[Gr1] G. Gratzer: Two Mal'cev-type theorems in universal algebra , *J. Combinatorial Theory* , **8** (1970), 334–342.

[Gu1] H.-P. Gumm: *Geometrical methods in congruence modular algebras*, Memoirs of the Amer. Math. Soc.. **45** (1983)

[Gu2] H.-P. Gumm: Congruence modularity is permutability composed with distributivity, *Arch. Math. (Basel)*, **36** (1981), 569–576.

[HH] C. Herrmann, A. P. Huhn: Zum Begriff der Charakteristik modulárer Verbände, *Math Z.*, **144** (1975), 185–194.

[Ho1] E. K. Horváth: Invariance groups of threshold functions, *Acta Cybernetica.*, **11** (1994), 325–332.

[Ho2] E. K. Horváth: The Słupecki criterion by duality, *Discussiones Mathematicae (General Algebra and Applications.*, **21** (2001), 5–10.

[Hu1] A. P. Huhn: Schwach distributive Verbände I, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **33** (1972), 297–305.

[Hu2] A. P. Huhn: On Grätzer's problem concerning automorphisms of a finitely presented lattice, *Algebra Universalis.*, **5** (1975), 65–71.

[J1] B. Jónsson: Algebras whose congruence lattices are distributive, *Math. Scand.*, Polygon. **21** (1967), 110–121

[J2] B. Jónsson: Congruence varieties, *Algebra Universalis*, **10** (1980), 355–394.

[Kr1] P. H. Krauss: On primal algebras, *Algebra Universalis*, **I.X.** (1999), 37–46.

[Kr2] P. H. Krauss: On quasi primal algebras, *Math Z.*, **134** (1973), 85–89.

[Mc] R. McKenzie: Equational bases and non-modular lattice varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **174** (1972), 1–43.

[Me] P. Mederly: Three Mal'cev type theorems and their application, *Mat. Casopis Sloven. Akad. Vied* , **25** (1975), 83–95.

[N] G. B. Nation: Varieties whose congruences satisfy certain lattice identities, *Algebra Universalis*, **4** (1974), 78–88.

[PSz] P. P. Pálfy, Cs. Szabó: An identity for subgroup lattices of abelian group, *Algebra Universalis*, **33.** (1995), 191–195

[PK] R. Pöschel, L. A. Kalushnin: *Funktionen- und Relationenalgebren*, Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.

[Sh] Ching Lai Sheng: *Threshold logic (H. G. Booker and N. DeClaris, eds.*, Academic Press, London and New York, 1969..

[Sl] J. Słupecki: Completeness criterion for systems of many-valued propositional calculus (in Polish), *C. R. des Séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie Cl. II*, **32** (1939), 102–109.

[St] M. Stern: *Semimodular lattices, Theory and applications*, Cambridge-New York-Melbourne, 1999.

[Sz] Á. Szendrei: *Clones in Universal Algebra*, Université de Montréal, 1986.

[T] W. Taylor: Characterizing Mal'cev conditions, *Algebra Universalis*, **3** (1973), 351–397.

[Inv1] http://en.wikipedia.org/wiki/Invariants