Szórakoztató matematika

Pap Gyula

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet, Sztochasztika Tanszék

Egyetemi Tavasz a Bolyai Intézetben

2017. április 22

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Szórakoztató matematika = Recreational mathematics

Mi a matematika?

- tudományág
  görögül: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ (máthema) = tan, tudomány, tudás
  $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ (mathematikós) = tudásra vágyik
- nyelv jelenségek kvalitatív leírására (modellalkotás)
- művészet? (hollandul: *wiskunde* = a tudás művészete)

A matematika jellegzetességei:

- absztrakt
- egzakt

Mitől lehet szórakoztató a matematika?

- váratlan eredmények, paradoxonok (látszólagos ellentmondások)
- játékosság
- érdekes összefüggések

Kahneman–Tversky paradoxonok

I. játék: Választani kell a következő lehetőségek közül:

(A) $\begin{cases} 0{,}8 \text{ valószínűséggel 4000 forint nyeremény,} \\ 0{,}2 \text{ valószínűséggel 0 forint nyeremény;} \end{cases}$

(B) 3000 forint nyeremény (biztosan, kockázat nélkül).

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$A \approx 20\%, \qquad B \approx 80\%$$

Kahneman–Tversky paradoxonok

I. játék: Választani kell a következő lehetőségek közül:

(A) $\begin{cases} \text{0,8 valószínűséggel 4000 forint nyeremény,} \\ \text{0,2 valószínűséggel 0 forint nyeremény;} \end{cases}$

(B) 3000 forint nyeremény (biztosan, kockázat nélkül).

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$A \approx 20\%, \qquad B \approx 80\%$$

Kahneman–Tversky paradoxon I

II. játék: Választani kell a következő lehetőségek közül:

$$\text{(C)}\quad \begin{cases} 0{,}2 \text{ valószínűséggel } 4000 \text{ forint nyeremény,} \\ 0{,}8 \text{ valószínűséggel } 0 \text{ forint nyeremény;} \end{cases}$$

$$\text{(D)}\quad \begin{cases} 0{,}25 \text{ valószínűséggel } 3000 \text{ forint nyeremény,} \\ 0{,}75 \text{ valószínűséggel } 0 \text{ forint nyeremény.} \end{cases}$$

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$C \approx 65\%, \qquad D \approx 35\%$$

A nyeremények várható értékei:

$$E(A) = 3200 > 3000 = E(B), \qquad E(C) = 800 > 750 = E(D).$$

A paradoxon magyarázata: *kockázatkerülés*

Kahneman–Tversky paradoxon I

II. játék: Választani kell a következő lehetőségek közül:

(C) $\begin{cases} \text{0,2 valószínűséggel 4000 forint nyeremény,} \\ \text{0,8 valószínűséggel 0 forint nyeremény;} \end{cases}$

(D) $\begin{cases} \text{0,25 valószínűséggel 3000 forint nyeremény,} \\ \text{0,75 valószínűséggel 0 forint nyeremény.} \end{cases}$

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$C \approx 65\%, \qquad D \approx 35\%$$

A nyeremények várható értékei:

$$E(A) = 3200 > 3000 = E(B), \qquad E(C) = 800 > 750 = E(D).$$

A paradoxon magyarázata: *kockázatkerülés*

Kahneman–Tversky paradoxon I

II. játék: Választani kell a következő lehetőségek közül:

(C) $\begin{cases} \text{0,2 valószínűséggel 4000 forint nyeremény,} \\ \text{0,8 valószínűséggel 0 forint nyeremény;} \end{cases}$

(D) $\begin{cases} \text{0,25 valószínűséggel 3000 forint nyeremény,} \\ \text{0,75 valószínűséggel 0 forint nyeremény.} \end{cases}$

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$\mathrm{C} \approx 65\%, \qquad \mathrm{D} \approx 35\%$$

A nyeremények várható értékei:

$$\mathrm{E(A)} = 3200 > 3000 = \mathrm{E(B)}, \qquad \mathrm{E(C)} = 800 > 750 = \mathrm{E(D)}.$$

A paradoxon magyarázata: *kockázatkerülés*

Kahneman–Tversky paradoxon I

II. játék: Választani kell a következő lehetőségek közül:

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \text{0,2 valószínűséggel 4000 forint nyeremény,} \\ \text{0,8 valószínűséggel 0 forint nyeremény;} \end{cases}$$

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} \text{0,25 valószínűséggel 3000 forint nyeremény,} \\ \text{0,75 valószínűséggel 0 forint nyeremény.} \end{cases}$$

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$C \approx 65\%, \qquad D \approx 35\%$$

A nyeremények várható értékei:

$$E(A) = 3200 > 3000 = E(B), \qquad E(C) = 800 > 750 = E(D).$$

A paradoxon magyarázata: *kockázatkerülés*

Kahneman–Tversky paradoxon II

I. játék: A résztvevő kap 1000 forintot, majd választani kell a következő lehetőségek közül:

(a) $\begin{cases} \text{0,5 valószínűséggel 1000 forint nyeremény,} \\ \text{0,5 valószínűséggel 0 forint nyeremény;} \end{cases}$

(b) további 500 forintot kap (biztosan, kockázat nélkül).

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$a \approx 16\%, \qquad b \approx 84\%$$

Kahneman–Tversky paradoxon II

I. játék: A résztvevő kap 1000 forintot, majd választani kell a következő lehetőségek közül:

(a) $\begin{cases} \text{0,5 valószínűséggel 1000 forint nyeremény,} \\ \text{0,5 valószínűséggel 0 forint nyeremény;} \end{cases}$

(b) további 500 forintot kap (biztosan, kockázat nélkül).

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$a \approx 16\%, \qquad b \approx 84\%$$

Kahneman–Tversky paradoxon II

II. játék: A résztvevő kap 2000 forintot, majd választani kell a következő lehetőségek közül:

(c) $\begin{cases} \text{0,5 valószínűséggel 1000 forint veszteség,} \\ \text{0,5 valószínűséggel 0 forint veszteség;} \end{cases}$

(d) 500 forintot fizet vissza.

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$c \approx 0,73, \qquad d \approx 0,27$$

A nyeremények várható értékei:

$$E(a) = 1500 = 1500 = E(b), \qquad E(c) = 1500 = 1500 = E(d),$$

sőt

$$a = c, \qquad b = d.$$

Kahneman–Tversky paradoxon II

II. játék: A résztvevő kap 2000 forintot, majd választani kell a következő lehetőségek közül:

(c) $\begin{cases} \text{0,5 valószínűséggel 1000 forint veszteség,} \\ \text{0,5 valószínűséggel 0 forint veszteség;} \end{cases}$

(d) 500 forintot fizet vissza.

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$c \approx 0,73, \qquad d \approx 0,27$$

A nyeremények várható értékei:

$$E(a) = 1500 = 1500 = E(b), \qquad E(c) = 1500 = 1500 = E(d),$$

sőt

$$a = c, \qquad b = d.$$

Kahneman–Tversky paradoxon II

II. játék: A résztvevő kap 2000 forintot, majd választani kell a következő lehetőségek közül:

(c) $\begin{cases} \text{0,5 valószínűséggel 1000 forint veszteség,} \\ \text{0,5 valószínűséggel 0 forint veszteség;} \end{cases}$

(d) 500 forintot fizet vissza.

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$c \approx 0,73, \qquad d \approx 0,27$$

A nyeremények várható értékei:

$$E(a) = 1500 = 1500 = E(b), \qquad E(c) = 1500 = 1500 = E(d),$$

sőt

$$a = c, \qquad b = d.$$

Kahneman–Tversky paradoxon II

II. játék: A résztvevő kap 2000 forintot, majd választani kell a következő lehetőségek közül:

(c) $\begin{cases} \text{0,5 valószínűséggel 1000 forint veszteség,} \\ \text{0,5 valószínűséggel 0 forint veszteség;} \end{cases}$

(d) 500 forintot fizet vissza.

A kísérletek szerint a válaszadók megoszlása:

$$c \approx 0,73, \qquad d \approx 0,27$$

A nyeremények várható értékei:

$$E(a) = 1500 = 1500 = E(b), \qquad E(c) = 1500 = 1500 = E(d),$$

sőt

$$a = c, \qquad b = d.$$

Egy pénzügyi matematikai paradoxon

Egy részvény árfolyamának változása:

- kezdőár: $X_0 = 1$;
- $X_n = \begin{cases} 2X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel,} \\ \frac{1}{3}X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$

Várható értéke: $\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(2X_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}X_{n-1}\right) = \frac{7}{6}\mathrm{E}(X_{n-1})$, így teljes indukcióval $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{7}{6}\right)^n$, ezért

$$\mathrm{E}(X_n) \to \infty \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Tulajdonképpen $X_n = \xi_n X_{n-1}$, ahol $\mathrm{P}(\xi_n = 2) = \mathrm{P}\left(\xi_n = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$, valamint $X_n = \xi_1 \cdots \xi_n$, ezért $\ln(X_n) = \ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)$.

Nagy számok törvénye:

$$\frac{\ln(X_n)}{n} = \frac{\ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)}{n} \to \mathrm{E}(\ln(\xi_1)) \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Mivel $\mathrm{E}(\ln(\xi_1)) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, így $\ln(X_n) \to -\infty$ amint $n \to \infty$, ezért

$$X_n \to 0 \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Egy pénzügyi matematikai paradoxon

Egy részvény árfolyamának változása:

- kezdőár: $X_0 = 1$;
- $X_n = \begin{cases} 2X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel,} \\ \frac{1}{3}X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$

Várható értéke: $\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(2X_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}X_{n-1}\right) = \frac{7}{6}\mathrm{E}(X_{n-1})$,
így teljes indukcióval $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{7}{6}\right)^n$, ezért

$$\mathrm{E}(X_n) \to \infty \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Tulajdonképpen $X_n = \xi_n X_{n-1}$, ahol $\mathrm{P}(\xi_n = 2) = \mathrm{P}\left(\xi_n = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$,
valamint $X_n = \xi_1 \cdots \xi_n$, ezért $\ln(X_n) = \ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)$.
Nagy számok törvénye:

$$\frac{\ln(X_n)}{n} = \frac{\ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)}{n} \to \mathrm{E}(\ln(\xi_1)) \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Mivel $\mathrm{E}(\ln(\xi_1)) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, így
$\ln(X_n) \to -\infty$ amint $n \to \infty$, ezért

$$X_n \to 0 \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Egy pénzügyi matematikai paradoxon

Egy részvény árfolyamának változása:

- kezdőár: $X_0 = 1$;
- $X_n = \begin{cases} 2X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel,} \\ \frac{1}{3}X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$

Várható értéke: $\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(2X_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}X_{n-1}\right) = \frac{7}{6}\mathrm{E}(X_{n-1})$,
így teljes indukcióval $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{7}{6}\right)^n$, ezért

$$\mathrm{E}(X_n) \to \infty \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Tulajdonképpen $X_n = \xi_n X_{n-1}$, ahol $\mathrm{P}(\xi_n = 2) = \mathrm{P}\left(\xi_n = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$,
valamint $X_n = \xi_1 \cdots \xi_n$, ezért $\ln(X_n) = \ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)$.
Nagy számok törvénye:

$$\frac{\ln(X_n)}{n} = \frac{\ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)}{n} \to \mathrm{E}(\ln(\xi_1)) \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Mivel $\mathrm{E}(\ln(\xi_1)) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, így
$\ln(X_n) \to -\infty$ amint $n \to \infty$, ezért

$$X_n \to 0 \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Egy pénzügyi matematikai paradoxon

Egy részvény árfolyamának változása:

- kezdőár: $X_0 = 1$;
- $X_n = \begin{cases} 2X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel,} \\ \frac{1}{3}X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$

Várható értéke: $\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(2X_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}X_{n-1}\right) = \frac{7}{6}\mathrm{E}(X_{n-1})$,
így teljes indukcióval $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{7}{6}\right)^n$, ezért

$$\mathrm{E}(X_n) \to \infty \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Tulajdonképpen $X_n = \xi_n X_{n-1}$, ahol $\mathrm{P}(\xi_n = 2) = \mathrm{P}\left(\xi_n = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$,
valamint $X_n = \xi_1 \cdots \xi_n$, ezért $\ln(X_n) = \ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)$.
Nagy számok törvénye:

$$\frac{\ln(X_n)}{n} = \frac{\ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)}{n} \to \mathrm{E}(\ln(\xi_1)) \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Mivel $\mathrm{E}(\ln(\xi_1)) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, így
$\ln(X_n) \to -\infty$ amint $n \to \infty$, ezért

$$X_n \to 0 \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Egy pénzügyi matematikai paradoxon

Egy részvény árfolyamának változása:

- kezdőár: $X_0 = 1$;
- $X_n = \begin{cases} 2X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel,} \\ \frac{1}{3}X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$

Várható értéke: $\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(2X_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}X_{n-1}\right) = \frac{7}{6}\mathrm{E}(X_{n-1})$,
így teljes indukcióval $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{7}{6}\right)^n$, ezért

$$\mathrm{E}(X_n) \to \infty \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Tulajdonképpen $X_n = \xi_n X_{n-1}$, ahol $\mathrm{P}(\xi_n = 2) = \mathrm{P}\left(\xi_n = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$,
valamint $X_n = \xi_1 \cdots \xi_n$, ezért $\ln(X_n) = \ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)$.

Nagy számok törvénye:

$$\frac{\ln(X_n)}{n} = \frac{\ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)}{n} \to \mathrm{E}(\ln(\xi_1)) \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Mivel $\mathrm{E}(\ln(\xi_1)) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, így
$\ln(X_n) \to -\infty$ amint $n \to \infty$, ezért

$$X_n \to 0 \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Egy részvény árfolyamának változása:

- kezdőár: $X_0 = 1$;
- $X_n = \begin{cases} 2X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel,} \\ \frac{1}{3}X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$

Várható értéke: $\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(2X_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}X_{n-1}\right) = \frac{7}{6}\mathrm{E}(X_{n-1})$,
így teljes indukcióval $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{7}{6}\right)^n$, ezért

$$\mathrm{E}(X_n) \to \infty \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Tulajdonképpen $X_n = \xi_n X_{n-1}$, ahol $\mathrm{P}(\xi_n = 2) = \mathrm{P}\left(\xi_n = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$,
valamint $X_n = \xi_1 \cdots \xi_n$, ezért $\ln(X_n) = \ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)$.
Nagy számok törvénye:

$$\frac{\ln(X_n)}{n} = \frac{\ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)}{n} \to \mathrm{E}(\ln(\xi_1)) \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Mivel $\mathrm{E}(\ln(\xi_1)) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, így
$\ln(X_n) \to -\infty$ amint $n \to \infty$, ezért

$$X_n \to 0 \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Egy pénzügyi matematikai paradoxon

Egy részvény árfolyamának változása:

- kezdőár: $X_0 = 1$;
- $X_n = \begin{cases} 2X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel,} \\ \frac{1}{3}X_{n-1} & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$

Várható értéke: $\mathrm{E}(X_n) = \frac{1}{2}\mathrm{E}(2X_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}X_{n-1}\right) = \frac{7}{6}\mathrm{E}(X_{n-1})$,
így teljes indukcióval $\mathrm{E}(X_n) = \left(\frac{7}{6}\right)^n$, ezért

$$\mathrm{E}(X_n) \to \infty \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Tulajdonképpen $X_n = \xi_n X_{n-1}$, ahol $\mathrm{P}(\xi_n = 2) = \mathrm{P}\left(\xi_n = \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$,
valamint $X_n = \xi_1 \cdots \xi_n$, ezért $\ln(X_n) = \ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)$.
Nagy számok törvénye:

$$\frac{\ln(X_n)}{n} = \frac{\ln(\xi_1) + \cdots + \ln(\xi_n)}{n} \to \mathrm{E}(\ln(\xi_1)) \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Mivel $\mathrm{E}(\ln(\xi_1)) = \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, így
$\ln(X_n) \to -\infty$ amint $n \to \infty$, ezért

$$X_n \to 0 \qquad \text{amint } n \to \infty.$$

Köszönöm a figyelmet!