Számelméleti feladatok a középiskolában

Előadó: Katonáné Dr. Horváth Eszter

Házi feladatok

2014. szeptember 03.

1. Feladat: Határozza meg azon $n \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre a $7n+1$ osztható $3n+4$-gyel.

2. Feladat: Bizonyítsa be, hogy $9 \mid 4^n + 15n - 1$-et, ha $n \in \mathbb{N}$.

3. Feladat: Igazolja, hogy páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul.

Szorgalmi: Igazolja, hogy végtelen sok olyan n természetes szám van, amelyre $2^n + 1$ osztható n-el. (Segítség: $n = 3^k,\ k \in \mathbb{N}$)

2014. szeptember 16.

1. Feladat: Adja meg a $36n+3$ és $90n+6$ számok legnagyobb közös osztóját ($n \in \mathbb{N}$).

Szorgalmi: Adja meg a $2^{63}-1$ és $2^{91}-1$ számok legnagyobb közös osztóját.

2014. szeptember 23.

1. Feladat: Bizonyítsa be, hogy nincs olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $6n+5$ előáll két prím összegekét.

2. Feladat: Keresse meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $n; n+10; n+14$ mindegyike prím.

3. Feladat: Keresse meg az összes olyan p prímet, amelyre $4p^2+1$ és $6p^2+1$ is egyaránt prímek.

Szorgalmi: Mutassa meg, hogy az $5^{20} + 2^{30}$ összetett szám.

2014. szeptember 30.

1. Feladat: Keressük meg az összes olyan p prímet, amelyre $2p^2+1$ is prím.

2. Feladat: Keressük meg az összes olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes számot, amelyre $2^n - 1$ és $2^n + 1$ egyaránt prím.

Szorgalmi: Bizonyítsa be, hogy bármely $p > 2$-re, m osztható p-vel, ahol m a következő tört számlálója:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

2014. október 14.

1. Feladat: Az 1 000 000-nál nem nagyobb pozitív egészek közül hány olyan van, amely 2, 3, 5 számok közül pontosan kettővel osztható?

2. Feladat: Hány olyan A szám van, amelyre 6^6, 8^8 és A legkisebb többszöröse 12^{12}?

3. Feladat: Hány olyan 1000-nél kisebb B szám van, amire 6^6, 30^{30} és B legnagyobb osztója 3^3?

4. Feladat: Milyen maradékot ad 5^{20}, 26-tal osztva?

5. Feladat: Bizonyítsa be, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$-re $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ osztható 7-tel.

2014. október 21.

1. Feladat: Oldja meg az alábbi egyenleteket, ha $x \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ és p prím.

a) $\varphi(p^x) = p^{x-1}$

b) $\varphi(m) = 14$

c) $\varphi(m) = 16$

Szorgalmi: Bizonyítsa be, hogy az Euler-féle φ függvény két definíciója ekvivalens. $(1 \Leftrightarrow 2)$
Euler-féle φ függvény 1. definíciója: Legyen m természetes szám, ekkor $m = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, ahol $p_1, \ldots, p_k$ $(k \geq 1)$ különböző prímek és $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

$$\varphi(m) = m \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = p_1^{n_1-1}(p_1 - 1) \cdots p_k^{n_k-1}(p_k - 1)$$

Euler-féle φ függvény 2. definíciója: $\varphi(m) : \{1, 2, \ldots, n-1\}$ halmazban a relatív prímek száma.
Segítség: Tétel: Legyen m természetes szám. Az $\{1, 2, \ldots, tm-1\}$ halmazban pontosan $t \cdot \varphi(m)$ darab m-hez relatív prím van.

Szorgalmi: Bizonyítsuk be, hogy ha a kongruenciát a modulushoz egy nem relatív prímmel szorozzuk, akkor az nem ekvivalens átalakítás.

Szorgalmi: Készítsünk olyan szöveges feladatot, melynek megoldása lineáris kongruenciához vezet.

2014. október 28.

1. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ melyre $\text{lnko}(a, 65) = \text{lnko}(b, 65)$ teljesül, hogy $65 \mid a^{12} - b^{12}$.

Szorgalmi: Készítsünk olyan szöveges feladatot, melynek megoldása diofantoszi egyenlethez vezet.

2014. november 04.

1. Feladat: Egy könyvespolc 3 polcán könyvek sorakoznak. Tudjuk, hogy a harmadik polcon lévő könyveket pontosan annyiféleképpen rendezhetjük sorba, mint amennyi az első és második polcon lévő könyvek lehetséges sorba rendezésének az összege. Hány könyv van az egyes polcokon? (Benedek Gábor)

2. Feladat: A karácsonyfa alatt 4 darab ajándék van, kocka alakú dobozokban. A négy doboz alapélei egymást követő egész számok és az első három doboz térfogatának összege megegyezik a negyedik térfogatával. Mekkora az egyes csomagok térfogata? (Benedek Gábor)

3. Feladat: Legyen $n = 77 = 7 \cdot 11$, és $e = 7$. Határozzuk meg f-et, kódoljuk a 14; 28; 30; 33 és dekódoljuk a 74; 27 számokat.

2014. november 11.

1. Feladat: Határozza meg a 403^{402}-on számnak az utolsó 3 számjegyét tízes számrendszerben.

2. Feladat: Legyen p és q két különböző prím. Bizonyítsa be, hogy $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p \cdot q}$.

2014. november 25.

1. Feladat: Oldja meg az alábbi kongruenciákat.

a) $x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod 7$

b) $x^6 - 1 \equiv 0 \pmod{35}$

Gábor el nem hangzott feladatai (SZORGALMIK)

1. Bizonyítsuk be, hogy ha a Fermat-sejtés igaz abban a speciális esetben, amikor $k = 4$ vagy k 2-nél nagyobb prímszám, akkor ebből következik, hogy a Fermat-sejtés tetszőleges k természetes számra igaz.

2. Bizonyítsuk be, hogy az $x^{15} + y^{27} = z^{33}$ diofantikus egyenlet megoldhatatlan a természetes számok körében.

3. Határozzuk meg a Fermat-egyenletek összes pozitív egész x, y, z megoldását a $k = -4$ esetben.

4. Igazoljuk, hogy $k > 2$ esetén a Fermat-egyenletnek nincs olyan megoldása, ahol x, y és z is (pozitív) prímszámok.

5. Hány megoldása lehet az $x^3 + y^3 = z^3 + 1$ diofantikus egyenletnek a természetes számok körében?