Polinomok 2.

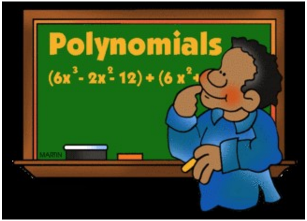
Polynomials 2.

Katonáné dr. Horváth Eszter

Szeged, 2018. febr. 20.

Polinom

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$



Irreducibilis polinom

Definíció

Azt mondjunk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis,* ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p-hez.

Formálisan:
$\forall\ f,\ g, \in T[x], :\ p = fg\ \rightarrow\ (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Irreducibilis polinom

Definíció

Azt mondjunk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis,* ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p-hez.

Formálisan:
$\forall\ f,\ g, \in T[x], :\ p = fg\ \rightarrow\ (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Irreducibilis polinom

Definíció

Azt mondjunk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis*, ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p-hez.

Formálisan:
$\forall\, f,\ g, \in T[x], :\ p = fg\ \rightarrow\ (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Irreducibilis polinom

Definíció

Azt mondjunk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis*, ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p-hez.

Formálisan:
$\forall\ f,\ g, \in T[x], :\ p = fg\ \rightarrow\ (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Irreducibilis polinom

Definíció

Azt mondjunk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis,* ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p-hez.

Formálisan:
$\forall\ f,\ g, \in T[x], :\ p = fg\ \rightarrow\ (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Irreducibilis polinom

Definíció

Azt mondjunk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis,* ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p-hez.

Formálisan:
$\forall\ f,\ g, \in T[x], :\ p = fg\ \rightarrow\ (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$

Asszociált: konstansszoros $\neq 0$.

A fenti felbontásban a másik tényező egy konstans.

Polinom helyettesítési értékei és gyökei

Definíció

Az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$

polinom $c \in T$ helyen vett helyettesítési értékén az

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \in T$$

elemet értjük.

Definíció

Az $\alpha \in T$ elem gyöke $f \in T[x]$-nek, ha $f(\alpha) = 0$.

Polinom helyettesítési értékei és gyökei

Definíció

Az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$

polinom $c \in T$ helyen vett helyettesítési értékén az

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \in T$$

elemet értjük.

Definíció

Az $\alpha \in T$ elem gyöke $f \in T[x]$-nek, ha $f(\alpha) = 0$.

Polinom helyettesítési értékei és gyökei

Definíció

Az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$

polinom $c \in T$ helyen vett helyettesítési értékén az

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \in T$$

elemet értjük.

Definíció

Az $\alpha \in T$ elem *gyöke* $f \in T[x]$-nek, ha $f(\alpha) = 0$.

Bézout tétele

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c-t az f polinom T-beli egyik gyökének nevezzük.

Bézout tétele

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c-t az f polinom T-beli egyik gyökének nevezzük.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke f-nek, ha az $x - c$ polinom osztója az f polinomnak (T[x]-ben).

Bizonyítás

Táblán.

Bézout tétele

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c-t az f polinom T-beli egyik gyökének nevezzük.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke f-nek, ha az $x - c$ polinom osztója az f polinomnak (T[x]-ben).

Bizonyítás

Táblán.

Bézout tétele

Ha $c \in T$ és $f \in T[x]$ esetén $f(c) = 0$, akkor c-t az f polinom T-beli egyik gyökének nevezzük.

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c \in T$. Ez esetben c akkor és csak akkor gyöke f-nek, ha az $x - c$ polinom osztója az f polinomnak (T[x]-ben).

Bizonyítás

Táblán.

A Bézout-tétel több gyök esetére

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c_1, \dots, c_k \in T$ páronként különböző elemek. Ez esetben a $c_1, \dots, c_k$ akkor és csak akkor gyökei f-nek, ha a $(x - c_1) \dots (x - c_k)$ osztója az f polinomnak ($T[x]$-ben).

Bizonyítás

k szerinti teljes indukció

A Bézout-tétel több gyök esetére

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c_1, \dots, c_k \in T$ páronként különböző elemek. Ez esetben a $c_1, \dots, c_k$ akkor és csak akkor gyökei f-nek, ha a $(x - c_1) \dots (x - c_k)$ osztója az f polinomnak ($T[x]$-ben).

Bizonyítás

k szerinti teljes indukció

A Bézout-tétel több gyök esetére

Tétel (Bézout-tétel)

Legyen T test és $f \in T[x]$ és $c_1, \dots, c_k \in T$ páronként különböző elemek. Ez esetben a $c_1, \dots, c_k$ akkor és csak akkor gyökei f-nek, ha a $(x - c_1) \dots (x - c_k)$ osztója az f polinomnak ($T[x]$-ben).

Bizonyítás

k szerinti teljes indukció

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n, akkor f-nek legfeljebb n különböző gyöke van T-ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n-edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T-beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n, akkor f-nek legfeljebb n különböző gyöke van T-ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n-edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T-beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n, akkor f-nek legfeljebb n különböző gyöke van T-ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n-edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T-beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n, akkor f-nek legfeljebb n különböző gyöke van T-ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n-edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T-beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.

A Bézout-tétel két következménye

Ha $f \in T[x]$ nem a zéruspolinom és fokszáma n, akkor f-nek legfeljebb n különböző gyöke van T-ben.

Ha az $f, g \in T[x]$ legfeljebb n-edfokú polinomok helyettesítési értéke $n+1$ különböző T-beli elemre megegyezik, akkor $f = g$.

Az algebra alaptétele / *Fundamental theorem of algebra*

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Az algebra alaptétele / *Fundamental theorem of algebra*

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Tétel (Algebra alaptétele)

Minden legalább elsőfokú, komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

Bizonyítás: KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Következmények

A komplex számtest felett egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha elsőfokú.

Bármely $f \in \mathbb{C}$ nemkonstans polinom felírható – mégpedig a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen –

$$f = a(x - c_1)(x - c_2)\dots(c - c_n) \qquad (a, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C})$$

alakban, ahol $a \in \mathbb{C} \quad (a \neq 0)$ az f polinom főegyütthatója, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ pedig az f polinom (nem feltétlenül különböző) gyökei.

Következmények

A komplex számtest felett egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha elsőfokú.

Bármely $f \in \mathbb{C}$ nemkonstans polinom felírható – mégpedig a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen –

$$f = a(x - c_1)(x - c_2) \dots (c - c_n) \qquad (a, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C})$$

alakban, ahol $a \in \mathbb{C} \quad (a \neq 0)$ az f polinom főegyütthatója, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ pedig az f polinom (nem feltétlenül különböző) gyökei.

Következmények

A komplex számtest felett egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis, ha elsőfokú.

Bármely $f \in \mathbb{C}$ nemkonstans polinom felírható – mégpedig a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen –

$$f = a(x - c_1)(x - c_2)\dots(c - c_n) \qquad (a, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C})$$

alakban, ahol $a \in \mathbb{C} \quad (a \neq 0)$ az f polinom főegyütthatója, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ pedig az f polinom (nem feltétlenül különböző) gyökei.

Valós együtthatós polinomok

Tétel

Egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben, ha elsőfokú, vagy olyan másodfokú, aminek a diszkriminánsa negatív (azaz nincs valós gyöke).

Bizonyítás

Táblán.

Tétel

Egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben, ha elsőfokú, vagy olyan másodfokú, aminek a diszkriminánsa negatív (azaz nincs valós gyöke).

Bizonyítás

Táblán.

Valós együtthatós polinomok

Tétel

Egy polinom akkor és csak akkor irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben, ha elsőfokú, vagy olyan másodfokú, aminek a diszkriminánsa negatív (azaz nincs valós gyöke).

Bizonyítás

Táblán.

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x-1)\ (x-(-1))\cdot$
$\cdot(x-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))\ (x-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))\ (x-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))\ (x-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)).$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :
$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x-1)\ (x-(-1))\cdot$
$\cdot(x-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))\ (x-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))\ (x-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))\ (x-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)).$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :
$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x-1)\,(x-(-1))\cdot$
$\cdot(x-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))\,(x-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))\,(x-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))\,(x-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)).$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :
$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x-1)\ (x-(-1))\cdot$
$\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)\left(x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right).$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :
$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$

1. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 1$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
± 1, $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x-1)\ (x-(-1))\cdot$
$\cdot(x-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))\ (x-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i))\ (x-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i))\ (x-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)).$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$ (and over $\mathbb{Q}$) :
$(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x-\sqrt{3})\ (x-(-\sqrt{3}))\cdot$
$\cdot(x-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i))\ (x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i))\ (x-(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i))\ (x-(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i)).$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:
$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)(x^2+\sqrt{3}x+3).$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:
$(x^2-3)(x^4+3x^2+9).$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x-\sqrt{3})\,(x-(-\sqrt{3}))\cdot$
$\cdot(x-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i))\,(x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i))\,(x-(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i))\,(x-(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i)).$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:
$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)(x^2+\sqrt{3}x+3).$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:
$(x^2-3)(x^4+3x^2+9).$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x - \sqrt{3})\ (x - (-\sqrt{3}))\cdot$
$\cdot(x - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))\ (x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i))\ (x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))\ (x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i)).$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:
$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3).$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:
$(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9).$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x - \sqrt{3})\ (x - (-\sqrt{3}))\cdot$
$\cdot(x - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))\ (x - (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i))\ (x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i))\ (x - (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i))$.

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:
$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$.

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:
$(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9)$.

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm\sqrt{3},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x-\sqrt{3})\ (x-(-\sqrt{3}))\cdot$
$\cdot(x-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i))\ (x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i))\ (x-(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i))\ (x-(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i)).$

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:
$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)(x^2+\sqrt{3}x+3).$

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:
$(x^2-3)(x^4+3x^2+9).$

2. Example

Irreducible factorization of $x^6 - 27$ over $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Roots:
$\pm\sqrt{3}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{3}{2}i$

Irreducible factorization over $\mathbb{C}$:
$(x-\sqrt{3})\ (x-(-\sqrt{3}))\cdot$
$\cdot(x-(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i))\ (x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i))\ (x-(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i))\ (x-(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i))$.

Irreducible factorization over $\mathbb{R}$:
$(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)(x^2+\sqrt{3}x+3)$.

Irreducible factorization over $\mathbb{Q}$:
$(x^2-3)(x^4+3x^2+9)$.

Thank you for your attention!