Polinomok

Polynomials

Katonáné dr. Horváth Eszter

Szeged, 2018. febr. 13.

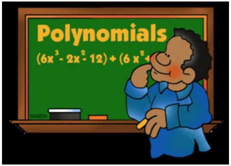
Polinom

Definíció

Ha T egy test, akkor T fölötti polinomon egy

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

alakú összeget értünk, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_n \in T$ (ezeket a polinom együtthatóinak nevezzük), x egy határozatlant jelöl, és $a_n \neq 0$.



Polinomok összege és szorzata

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk:

$f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és $fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2 \cdot 2)x^3 + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)x^2 + (-3 \cdot 3 - 2 \cdot 4)x + 12$, azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$.

Polinomok összege és szorzata

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk:

$f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és $fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2 \cdot 2)x^3 + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)x^2 + (-3 \cdot 3 - 2 \cdot 4)x + 12$, azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$.

Polinomok összege és szorzata

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk:

$f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és $fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2 \cdot 2)x^3 + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)x^2 + (-3 \cdot 3 - 2 \cdot 4)x + 12$, azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$.

Polinomok összege és szorzata

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk:

$f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és $fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2 \cdot 2)x^3 + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)x^2 + (-3 \cdot 3 - 2 \cdot 4)x + 12$, azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$.

Polinomok összege és szorzata

Értelemszerűen definiálható két polinom összege és szorzata; a formális definíció helyett ezt egy példán illusztráljuk:

$f = x^3 + 2x - 3$, $g = 2x^2 + 3x - 4$. Ekkor $f + g = x^3 + 2x^2 + 5x - 7$ és $fg = 2x^5 + 3x^4 + (-4 + 2 \cdot 2)x^3 + (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)x^2 + (-3 \cdot 3 - 2 \cdot 4)x + 12$, azaz $fg = 2x^5 + 3x^4 - 17x + 12$.

Oszthatóság, asszociáltság

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f \in T[x]$ polinom *osztója* a $g \in T[x]$ polinomnak, és $f|g$-vel jelöljük, ha létezik olyan $h \in T[x]$, amelyre $g = fh$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az f és a g polinomok asszociáltak, és $f \sim g$-vel jelöljük, ha $f|g$ és $g|f$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f \in T[x]$ polinom *osztója* a $g \in T[x]$ polinomnak, és $f|g$-vel jelöljük, ha létezik olyan $h \in T[x]$, amelyre $g = fh$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az f és a g polinomok asszociáltak, és $f \sim g$-vel jelöljük, ha $f|g$ és $g|f$.

Oszthatóság, asszociáltság

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f \in T[x]$ polinom *osztója* a $g \in T[x]$ polinomnak, és $f|g$-vel jelöljük, ha létezik olyan $h \in T[x]$, amelyre $g = fh$.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az f és a g polinomok asszociáltak, és $f \sim g$-vel jelöljük, ha $f|g$ és $g|f$.

Maradékos osztás tétele

Tétel

Ha T test, akkor bámely $f, g \in T[x]$ esetén ha $g \neq 0$, akkor létezik olyan $q, r \in T[x]$, hogy

$$f = gq + r \qquad \text{és } r^* < g^*$$

Legnagyobb közös osztó

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Akkor mondjuk, hogy egy $h(x) \in T[x]$ polinom *legnagyobb közös osztója* $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, jelben $h(x) = \text{ln. k. o.}(f(x), g(x))$, ha

1. $h(x) \mid f(x)$ és $h(x) \mid g(x)$ (azaz $h(x)$ közös osztó), és
2. bármely $t(x) \in T[x]$-re ha $t(x) \mid f(x)$ és $t(x) \mid g(x)$ (azaz $t(x)$ is közös osztó), akkor $t(x) \mid h(x)$.

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Akkor mondjuk, hogy egy $h(x) \in T[x]$ polinom *legnagyobb közös osztója* $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, jelben $h(x) = \text{ln. k. o.}(f(x), g(x))$, ha

1. $h(x) \mid f(x)$ és $h(x) \mid g(x)$ (azaz $h(x)$ közös osztó), és
2. bármely $t(x) \in T[x]$-re ha $t(x) \mid f(x)$ és $t(x) \mid g(x)$ (azaz $t(x)$ is közös osztó), akkor $t(x) \mid h(x)$.

Legnagyobb közös osztó

Definíció

Legyen T test és legyen $f(x), g(x) \in T[x]$. Akkor mondjuk, hogy egy $h(x) \in T[x]$ polinom *legnagyobb közös osztója* $f(x)$-nek és $g(x)$-nek, jelben $h(x) = \text{ln. k. o.}(f(x), g(x))$, ha

1. $h(x) \mid f(x)$ és $h(x) \mid g(x)$ (azaz $h(x)$ közös osztó), és
2. bármely $t(x) \in T[x]$-re ha $t(x) \mid f(x)$ és $t(x) \mid g(x)$ (azaz $t(x)$ is közös osztó), akkor $t(x) \mid h(x)$.

Irreducibilis polinom

Definíció

Azt mondjunk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis,* ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p-hez.

Formálisan:
$\forall\ f,\ g, \in T[x], :\ \ p = fg\ \ \rightarrow\ \ (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$

Irreducibilis polinom

Definíció

Azt mondjunk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis,* ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p-hez.

Formálisan:
$\forall\ f,\ g, \in T[x], :\ \ p = fg\ \ \rightarrow\ \ (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$

Irreducibilis polinom

Definíció

Azt mondjunk, hogy a $p \in T[x]$ polinom *irreducibilis,* ha legalább elsőfokú, és csak úgy bontható két polinom szorzatára, ha az egyik tényező asszociált p-hez.

Formálisan:
$\forall\ f,\ g, \in T[x], :\ p = fg\ \rightarrow\ (p \sim f \text{ vagy } p \sim g)$

Polinom helyettesítési értékei és gyökei

Definíció

Az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$

polinom $c \in T$ helyen vett helyettesítési értékén az

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \in T$$

elemet értjük.

Definíció

Az $\alpha \in T$ elem gyöke $f \in T[x]$-nek, ha $f(\alpha) = 0$.

Polinom helyettesítési értékei és gyökei

Definíció

Az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$

polinom $c \in T$ helyen vett helyettesítési értékén az

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \in T$$

elemet értjük.

Definíció

Az $\alpha \in T$ elem gyöke $f \in T[x]$-nek, ha $f(\alpha) = 0$.

Polinom helyettesítési értékei és gyökei

Definíció

Az

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in T[x]$$

polinom $c \in T$ helyen vett helyettesítési értékén az

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \in T$$

elemet értjük.

Definíció

Az $\alpha \in T$ elem *gyöke* $f \in T[x]$-nek, ha $f(\alpha) = 0$.