FELADATOK A „MŰVELETEK, MŰVELETI TULAJDONSÁGOK" TÉMAKÖRHÖZ

1. Feladat. Művelet-e

(a) a szokásos összeadás, illetve szorzás a $\{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$ halmazon;
(b) a szokásos összeadás, illetve szorzás a 3-jegyű pozitív egész számok halmazán;
(c) a szokásos összeadás, illetve szorzás az $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$ halmazon;
(d) a transzformációszorzás a sík összes eltolásainak halmazán;
(e) a metszés, illetve egyesítés az $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$ halmazon;
(f) a diszjunkció, illetve konjunkció az $\{\mathbf{i}\}$ halmazon, ahol $\mathbf{i}$ az igaz logikai érték;
(g) a vektoriális szorzás az $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, -\underline{i}, -\underline{j}, -\underline{k}\}$ halmazon, ahol $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ a térbeli derékszögű koordinátarendszert kifeszítő egységvektorok;
(h) a szokásos összeadás a $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\}$ halmazon, ahol $\overline{0}, \overline{3}, \overline{6} \in \mathbb{Z}_9$?

2. Feladat. Művelet-e

(a) az $\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 2\}$ halmazon $\circ$, ahol $a \circ b = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$;
(b) az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon $*$, ahol $a * b = \dfrac{a}{b} + 1$;
(c) az $\{r \in \mathbb{R} \mid -1 < r < 1\}$ halmazon $\square$, ahol $a \square b = \dfrac{a + b}{1 + ab}$;
(d) az $\{r \in \mathbb{R} \mid 10 \leq r \leq 20\}$ halmazon $\triangle$, ahol $a \triangle b = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$;
(e) az $\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}$ halmazon $\oplus$, ahol $a \oplus b = a + b - ab$;
(f) az $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 1\}$ halmazon $\sqcap$, ahol $a \sqcap b = \min(a + b, 1)$?

3. Feladat. Készítse el az alábbi grupoidok művelettábláját, és ennek alapján állapítsa meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

(a) $(\{-1, 0, 1\};\ \cdot\ )$;
(b) $(\{-1, 0, 1\};\ \sqcup\ )$, ahol $a \sqcup b = \max(a, b)$;
(c) $(\{\underline{0}, \underline{i}\};\ \times\ )$, ahol $\underline{0} = (0, 0, 0)$, $\underline{i} = (1, 0, 0)$;
(d) $(R_8;\ \cdot\ )$;
(e) $(P(\{1, 2\});\ \setminus\ )$;
(f) $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \rightarrow)$, ahol $\mathbf{i}$ az igaz, $\mathbf{h}$ a hamis logikai érték.

4. Feladat. Az $(\{a, b, c, d\};\ \circ\ )$ grupoid művelettáblája:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	b	c	b	b
d	d	d	a	a

Kommutatív-e a $\circ$ művelet? Van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

5. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok asszociatívak-e, kommutatívak-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keresse meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze.

(a) $(\mathbb{N};\ *\ )$, ahol $m * n = mn - m + n$;
(b) $(\mathbb{N};\ \circ\ )$, ahol $m \circ n = mn + m + n$;
(c) $(\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 2\};\ \triangle\ )$, ahol $x \triangle y = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;
(d) $(\mathbb{Q};\ \square\ )$, ahol $q \square r = q$;
(e) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 5 \leq r \leq 8\};\ *\ )$, ahol $x * y = \frac{3}{7}x + \frac{4}{7}y$;
(f) $(\mathbb{Z};\ \oplus\ )$, ahol $a \oplus b = 2a - 5b$;
(g) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\};\ \circ\ )$, ahol $x \circ y = \frac{1}{3}$;
(h) $(\mathbb{R};\ \triangle\ )$, ahol $x \triangle y = xy - 2(x + y) + 6$;

(i) $(\mathbb{R};\ \square\ )$, ahol $x \square y = 12 - 3x - 3y + xy$;
(j) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\};\ \oplus\ )$, ahol $x \oplus y = |x - y|$;
(k) $(\mathbb{R}^+;\ *\ )$, ahol $x * y = x^y$;
(l) $(\mathbb{N}_0; \text{ln.k.o.})$;
(m) $(\mathbb{R};\ \sqcup\ )$, ahol $x \sqcup y = \max(x, y)$;
(n) $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\};\ \circ\ )$, ahol $x \circ y = x + y - xy$;
(o) $(\mathbb{R}^+;\ \triangle\ )$, ahol $x \triangle y = \sqrt{xy}$;
(p) $(\mathbb{R};\ \square\ )$, ahol $x \square y = \dfrac{x+y}{2}$.

6. Feladat. Vizsgálja meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok.
(a) $(\mathbb{N};\ +\ )$, $(\mathbb{N}_0;\ +\ )$, $(\mathbb{Z};\ +\ )$;
(b) $(\mathbb{Q};\ \cdot\ )$, $(\mathbb{R}^+;\ \cdot\ )$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\};\ \cdot\ )$;
(c) $(P(\mathbb{N});\ \setminus\ )$, $(P(\mathbb{N});\ \cap\ )$, $(P(\mathbb{N});\ \Delta\ )$;
(d) $(\mathbb{Z}_{12};\ +\ )$, $(\mathbb{Z}_{12};\ \cdot\ )$;
(e) $(\{\varepsilon \in \mathbb{C} \mid \varepsilon^{10} = 1\};\ \cdot\ )$;
(f) $(S_4;\ \cdot\ )$;
(g) $([-1, 1];\ \sqcap\ )$, ahol $x \sqcap y = \min(x, y)$;
(h) $(\mathbb{Z};\ \circ\ )$, ahol $a \circ b = a + (-1)^a b$;
(i) $(\mathbb{Z};\ \circ\ )$, ahol $a \circ b = (-1)^b a + (-1)^a b$;
(j) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\};\ *\ )$, ahol $(a, b) * (c, d) = (ad + bc, bd)$.

7. Feladat. Az alábbi állítások közül melyek érvényesek tetszőleges csoport minden a, b, x, y elemére, és melyek nem érvényes?
(a) Ha $axb = ayb$, akkor $x = y$.
(b) Ha $a^{-1} = b^{-1}$, akkor $a = b$.
(c) Ha $xa = ay$, akkor $x = y$.
(d) Ha $ax = 1$ $x = a^{-1}$.
(e) Ha $abx = 1$, akkor $x = a^{-1}b^{-1}$.
(f) Ha $(ab)^2 = a^2b^2$, akkor $ab = ba$.

8. Feladat. Döntse el, hogy az A halmazon megadott műveletek közül valamelyik disztributív-e egy másikra, vagy saját magára vonatkozóan.
(a) $A = \mathbb{R}$, műveletek: összeadás, kivonás, szorzás;
(b) $A = \mathbb{R}^+$, műveletek: szorzás, osztás, hatványozás;
(c) $A = P(X)$, ahol X rögzített halmaz, műveletek: unió, metszet;
(d) $A = \mathbb{N}$, műveletek: legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös képzése;

9. Feladat. Melyek alkotnak gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebrák közül?
(a) $(\mathbb{N};\ +\ ,\ \cdot\ )$, $(\mathbb{Z};\ +\ ,\ \cdot\ )$, $(\mathbb{R};\ +\ ,\ \cdot\ )$, $(\mathbb{C};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(b) $(\mathbb{R}^3;\ +\ ,\ \times\ )$;
(c) $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\};\ \leftrightarrow\ ,\ \vee\ )$;
(d) $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(e) $(\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(f) $(\{\frac{a}{5^n} \mid a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0\};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(g) $(\mathbb{Z}_{12};\ +\ ,\ \cdot\ )$, $(\mathbb{Z}_{13};\ +\ ,\ \cdot\ )$;
(h) $(\mathbb{R}; \oplus, \odot)$, ahol $x \oplus y = x + y - 1$, $x \odot y = x + y - xy$.

10. Feladat. Bizonyítsa be, hogy bármely R gyűrű tetszőleges a, b, c elemére fennállnak az alábbi egyenlőségek.
(a) $(a - b) + b = a$;
(b) $a - a = 0$ és $-(a - b) = (-a) - (-b) = b - a$;
(c) $(a - b) + (b - c) = a - c$;
(d) $(a - c) - (b - c) = a - b$;
(e) $(a - b)c = ac - bc$;
(f) $c(a - b) = ca - cb$.

11. Feladat. (a) Végezze el a következő műveleteket a $\mathbb{Z}_{37}$ testben:

$$\overline{22} + \overline{15}, \qquad \overline{22} \cdot \overline{15}, \qquad \overline{23}^{-1}, \qquad \overline{2}^{10}, \qquad \overline{3}^{-10}, \qquad \overline{36}^{1526}.$$

(b) Oldja meg a $\mathbb{Z}_{42}$ gyűrűben az alábbi egyenletek közül a megoldhatókat:

$$\overline{26}x = \overline{14}; \qquad \overline{18}x = \overline{16}; \qquad \overline{37}x = \overline{19}; \qquad \overline{20}^2 x = -\overline{20}x.$$