

## FELADATOK A „KOMPLEX SZÁMOK” TÉMAKÖRHÖZ

**7.1. Feladat.** Kanonikus alakkal számolva határozza meg az alábbi műveletek végeredményét!

- (a)  $(3 + 5i)(2 - 7i)$ ;
- (b)  $(-6 + 9i + 4 - 8i) \cdot i$ ;
- (c)  $\frac{-7-i}{1+4i}$ ;
- (d)  $\frac{(-2+3i)(8+i)}{(-4-7i)(1-i)}$ ;
- (e)  $(2 + 5i)^2 + \overline{(2 + 5i)^2}$ ;
- (f)  $(1 + 2i)^3; (1 + 2i)^4$ ;
- (g)  $(\frac{(3+i)(-1+i)}{2+i})^2 - (\frac{(3+i)(-1-i)}{2-i})^2$ ;
- (h)  $i^{2003}; i^{-22}; i^{1984}; i^{801}$ .

**7.2. Feladat.** Kanonikus alakkal számolva adja meg a következő komplex számokat!

- (a)  $\sqrt{i}$ ;
- (b)  $\sqrt{-3 + 4i}$ ;
- (c)  $\sqrt{-5 - 12i}$ ;
- (d)  $\sqrt{-9 + 40i}$ ;
- (e)  $\sqrt[4]{i}$ ;
- (f)  $\sqrt[4]{-16}$ ;
- (g)  $\sqrt[4]{-7 - 24i}$ .

**7.3. Feladat.** Az alábbi kanonikus alakban adott komplex számokat írja át trigonometrikus alakba, és ábrázolja azokat a Gauss-féle számsíkon!

$$5; -5; i; -8i; \sqrt{2} + \sqrt{2}i; \frac{7}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}i; -\sqrt{3} - i; -2 - 2i; 3 + 4i.$$

**7.4. Feladat.** Az alábbi trigonometrikus alakban adott komplex számokat írja át kanonikus alakba, és ábrázolja azokat a Gauss-féle számsíkon!

- (a)  $2(\cos 0 + i \sin 0)$ ;
- (b)  $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ ;

- (c)  $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$ ;  
 (d)  $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$ .

**7.5. Feladat.** Trigonometrikus alakkal számolva határozza meg az alábbi műveletek eredményét!

- (a)  $(\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}i)$ ;  
 (b)  $\frac{1-i}{1+i}$ ;  
 (c)  $\frac{(-1-i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+i)(-\sqrt{3}+i)}$ ;  
 (d)  $(\sqrt{3} - i)^{67}$ ;  
 (e)  $(1 + i)^{1222}$ ;  
 (f)  $(-3 - 3\sqrt{3}i)^{1526}$ ;  
 (g)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2000} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2000}$ ;  
 (h)  $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2000} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2000}$ .

**7.6. Feladat.** Adja meg kanonikus alakban a  $z = \frac{(-1 + i)^6}{(\sqrt{3} - i)^8}$  komplex számot.

**7.7. Feladat.** Adja meg kanonikus és trigonometrikus alakban a következő gyökvo-  
nások eredményét:

- (a)  $\sqrt[4]{-16}$ ;  
 (b)  $\sqrt[3]{-8}$ ;  
 (c)  $\sqrt{i}$ ;  
 (d)  $\sqrt[4]{i}$ ;  
 (e)  $\sqrt[6]{64}$ ;  
 (f)  $\sqrt[3]{-8i}$ ;  
 (g)  $\sqrt[3]{i}$ ;  
 (h)  $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$ ;  
 (i)  $\sqrt{\frac{2i}{1-i}}$

**7.8. Feladat.** Határozza meg a  $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$  komplex szám 4-edik gyökeit, és ezen gyökök összegét.

**7.9. Feladat.** Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

- (a)  $x^2 + (1 + 3i)x + (-2 + i) = 0$ ;  
 (b)  $x^2 - (4 - 2i)x + (11 + 2i) = 0$ ;  
 (c)  $x^2 - (7 + i)x + (16 + 11i) = 0$ ;

- (d)  $x^2 - (4 + 3i)x + (1 + 7i) = 0$ ;  
 (e)  $(2 + i)x^2 + (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$ .

**7.10. Feladat.** Oldja meg a  $z^2 - 6i - 4z + 3 + 2iz = 0$  egyenletet a komplex számok körében.

**7.11. Feladat.** Határozza meg azokat a komplex számokat, amelyeknek konjugáltja egyenlő az eredeti szám négyzetével.

**7.12. Feladat.** Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

- (a)  $\bar{z} + |z| = 4 - 3i$ ;  
 (b)  $z^2 + |z|^2 = 8 + 6i$ ;  
 (c)  $z^2 + 3\bar{z}^2 = 15 - 4i$ ;  
 (d)  $z^2 + 4\bar{z} = |z|^2 + 6$ ;  
 (e)  $z^2 + 6\bar{z} = |z|^2 + 16$ ;  
 (f)  $i\bar{z} = z^2$ ;  
 (g)  $|z| - z = 1 + 2i$ ;  
 (h)  $\bar{z}^2 z = -8i$ ;  
 (i)  $z^2 \bar{z} = 5 + 10i$ .

**7.13. Feladat.** Oldja meg a  $(z + i)^3 = 8i$  egyenletet a komplex számok halmazán.

**7.14. Feladat.** Egy  $z$  komplex számra  $1 + z + z^2 = 0$  teljesül. Igazolja, hogy

$$z^{65} + \frac{1}{z^{65}} = i^{66}.$$

**7.15. Feladat.** Ábrázolja Gauss-számsíkon a

- (a) harmadik;  
 (b) negyedik;  
 (c) hatodik;  
 (d) nyolcadik

egységgyököket, és állapítsa meg, melyek közülük rendre a primitív harmadik, negyedik, hatodik, nyolcadik egységgyökök!

**7.16. Feladat.** Az alábbi komplex számok közül melyek egységgyökök? Melyek lehetnek primitív  $n$ -edik egységgyökök valamely  $n$  pozitív egészre, adjuk meg a megfelelő  $n$ -eket:

- (a)  $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}$ ,  
 (b)  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}$ .

**7.17. Feladat.** Határozza meg az  $n$ -edik komplex egységgyökök szorzatát ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**7.18. Feladat.** Határozza meg az alábbi hatványokat:

- (a)  $\varepsilon^{669}$ , ahol  $\varepsilon$  primitív hatodik egységgyök;
- (b)  $\varepsilon^{2004}$ , ahol  $\varepsilon$  primitív nyolcadik egységgyök;
- (c)  $\varepsilon^{2001}$ , ahol  $\varepsilon$  primitív hatodik egységgyök;
- (d)  $\varepsilon^{33}$ , ahol  $\varepsilon$  primitív hatodik egységgyök.

**7.19. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy ha egy  $\varepsilon$  komplex szám 10. és 14. egységgyök egyszerre, akkor  $\varepsilon$  csak 1 vagy  $-1$  lehet.

**7.20. Feladat.** Igaz-e, hogy ha  $z_1$  és  $z_2$   $n$ -edik egységgyökök, akkor az összegük is az?