

FELADATOK AZ „ÍTÉLETKALKULUS” TÉMAKÖRHÖZ

DISZKRÉT MATEMATIKA

3.1. Feladat. Döntse el, hogy az

- (a) $A \leftrightarrow ((\neg B) \rightarrow (C \wedge B))$ (b) $(A \leftrightarrow (\neg B)) \rightarrow (C \wedge B)$
(c) $((A \rightarrow (\neg B)) \leftrightarrow C) \wedge B$ (d) $(A \rightarrow (\neg B)) \rightarrow (C \wedge B)$

formulák közül — a primitívek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Ha Picur akkor és csak akkor szabadítja ki a kalitkából Gombóc Artúrt, ha Artúr nem eszik csokoládét, akkor Artúr inkább a kalitkában marad, és eszi a csokoládét.

3.2. Feladat. Döntse el, hogy az

- (a) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \wedge C)$ (b) $(A \leftrightarrow B) \vee ((\neg B) \rightarrow C)$
(c) $A \leftrightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$ (d) $A \rightarrow (B \vee ((\neg B) \wedge C))$

formulák közül — a primitívek alkalmas megválasztásával — melyik formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Gombóc Artúr akkor és csak akkor tud Afrikába utazni, ha elbírja a repülőgépet, vagy ha nem bírja el a repülőgépet, de indul hajó Afrikába.

3.3. Feladat. A primitívek alkalmas megválasztásával formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéleteket:

(a) *Ha ezt a mondatot jól formalizálom, vagy a gyakorlatvezetőnek jó kedve van, akkor kapok két pontot, és örülhetek.*

(b) *Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat gyakorlatra, ha kis zh-t írunk.*

(c) *Rossz kedvem van, és ha fáj a lábam, akkor a barátom nem jön velem táncolni.*

(d) *Pontosan akkor érem el a zh-t, ha nem esik több hó, vagy ha esik, de eltakarítják.*

(e) *Akkor és csak akkor jön a télapó szánnal, ha esik a hó, nem olvad el, és nem sérül le egyetlen rénszarvas sem.*

(f) *Csak akkor megyek el a gyakorlatra, ha nem sikerült valamelyik feladatot megoldanom, vagy bele sem néztem az anyagba.*

(g) *Megírom a vizsgadolgozatot, de csak akkor, ha van legalább 25 pontom, és tudom legalább az anyag felét.*

3.4. Feladat. Adja meg az alábbi formula összes részformuláját:

$$(A \vee (\neg B)) \leftrightarrow ((\neg C) \rightarrow (D \vee A)).$$

3.5. Feladat. Az igazságtáblázatok felírása nélkül adjon az alábbi formulákban előforduló logikai változóknak logikai értéket úgy, hogy az adott formula logikai értéke igaz, illetve hamis legyen.

- (a) $A \rightarrow ((\neg B) \vee C)$;
- (b) $(\neg A) \leftrightarrow (B \wedge ((\neg C) \vee A))$;
- (c) $(\neg A) \rightarrow (B \wedge (C \vee A))$.

3.6. Feladat. Fogadjuk el igaznak a következő formulákat:

$$A \rightarrow (B \wedge (\neg C)), \quad (\neg B) \vee (\neg D), \quad ((\neg E) \vee (\neg F)) \rightarrow D, \quad B \rightarrow (G \wedge E).$$

Mit mondhatunk ekkor a $B \rightarrow F$ formula igazságértékéről?

3.7. Feladat. Formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Ha hideg van, vagy esik az eső, akkor megfázom.

Mit mondhatunk ennek az ítéletnek az igazságértékéről, ha igaznak fogadjuk el a következő ítéletet:

Esik az eső, de nem fázom meg.

3.8. Feladat. Formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Ha nem fáj a lábam és nincs rossz kedvem, akkor pontosan abban az esetben megyek el táncolni, ha a barátom is velem jön.

Mit mondhatunk ennek az ítéletnek az igazságértékéről, ha igaznak fogadjuk el a következő ítéletet:

Fáj a lábam.

3.9. Feladat. A megadott primítéletek felhasználásával formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Ha Micimackó mézet akar enni, de a méz a fán van, akkor a mézszerzés pontosan akkor sikeres, ha Malacka nem fél a méhektől, vagy Tigris fel tud mászni a fára.

A primítéletek legyenek a következők:

A: Micimackó mézet akar enni.

D: Malacka fél a méhektől.

B: A méz a fán van.

E: Tigris fel tud mászni a fára.

C: A mézszerzés sikeres.

Mit mondhatunk a fenti állítás igazságértékéről, ha igazak a következő állítások:

Nem igaz az, hogy Micimackó nem akar mézet enni. A mézszerzés sikeres, és Malacka nem fél a méhektől.

3.10. Feladat. A megadott primítéletek felhasználásával formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot.

A primítételek legyenek a következők:

A: A róka okos.

D: A holló kinyitja a csőrét.

B: A holló buta.

E: A róka megkérdezi a hollót.

C: A holló leejti a sajtot.

Mit lehet mondani a fenti állítás igazságértékéről, ha igazak a következő állítások:

Nem igaz az, hogy ha a holló kinyitja a csőrét, akkor a holló leejti a sajtot. A holló pontosan akkor nyitja ki a csőrét, ha a róka megkérdezi őt. A holló buta.

3.11. Feladat. A megadott primítételek felhasználásával formalizálja a következő ítéletkalkulusbeli ítéletet:

Ha a Vadász lelőtte a Farkast, akkor a Nagyfi pontosan akkor evett epret, ha nem igaz az, hogy Piroska szereti a Farkast, vagy a Farkas megeszi a Nagyfit.

A primítételek legyenek a következők:

A: Piroska szereti a Farkast.

C: A Farkas megeszi a Nagyfit.

B: Nagyfi epret evett.

D: A Vadász lelőtte a Farkast.

Mit lehet mondani a fenti állítás igazságértékéről, ha igazak a következő állítások:

Piroska szereti a Farkast, de ha Nagyfi nem evett epret, akkor a Farkas megeszi a Nagyfit. Ha a Farkas megeszi a Nagyfit, akkor Piroska nem szereti a Farkast. A Vadász lelőtte a Farkast.

3.12. Feladat. A megadott primítételek felhasználásával formalizálja az alábbi ítéletkalkulusbeli ítéleteket:

Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor pontosan abban az esetben főz ebédet, ha nem takarít.

Ha Hófehérke egyedül marad otthon, akkor megeszi a mérgezett almát, ha viszont nem marad egyedül otthon, akkor nem főz ebédet és nem takarít.

A primítételek legyenek a következők:

A: Hófehérke megeszi a mérgezett almát.

C: Hófehérke ebédet főz.

B: Hófehérke egyedül marad otthon.

D: Hófehérke takarít.

Mit mondhatunk a fenti ítéletek igazságértékéről, ha igaznak fogadjuk el a következő ítéleteket:

Hófehérke pontosan akkor eszi meg a mérgezett almát, ha egyedül marad otthon.

Ha Hófehérke megeszi a mérgezett almát, akkor nem főz ebédet és nem takarít.

Hófehérke egyedül marad otthon.

3.13. Feladat. Igazolja az alábbi logikai ekvivalenciákat a formulák igazságtáblázatainak felhasználásával, valamint a tautológiagyűjtemény segítségével:

(a) $(A \wedge B) \rightarrow C \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$;

(b) $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \equiv (A \vee B) \rightarrow C$;

(c) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)) \equiv A \rightarrow (A \vee B)$;

(d) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \rightarrow A$;

(e) $((A \wedge B) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (\neg C)) \equiv (((\neg C) \vee B) \vee C) \leftrightarrow (\neg(C \wedge A))$.

3.14. Feladat. Igazolja, hogy az implikáció nem asszociatív, azaz hogy az

$$(A \rightarrow B) \rightarrow C \quad \text{és} \quad A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

formula nem logikailag ekvivalens.

3.15. Feladat. Állapítsa meg, hogy logikailag ekvivalensek-e az alábbi formulapárok:

- (a) $(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$ és $((A \vee B) \rightarrow C) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$;
 (b) $((B \vee C) \rightarrow A) \leftrightarrow (\neg(B \wedge C))$ és $((C \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow A)) \leftrightarrow ((\neg B) \wedge (\neg C))$;
 (c) $((\neg A) \rightarrow C) \wedge ((C \vee B) \rightarrow C)$ és $((\neg A) \vee B \vee C) \leftrightarrow C$.

3.16. Feladat. Döntse el, hogy melyek logikailag ekvivalensek az alábbi formulák közül, és melyek nem:

- (a) $F_1 = B \vee (\neg B)$, $F_2 = (\neg A) \rightarrow (\neg A)$ és $F_3 = \neg(A \wedge (\neg A))$;
 (b) $F_1 = A \wedge (\neg A)$, $F_2 = B \leftrightarrow (A \vee B)$, $F_3 = A \rightarrow (A \vee B)$ és $F_4 = (A \vee B) \wedge ((\neg A) \wedge (\neg B))$;
 (c) $F_1 = \neg(A \leftrightarrow B)$, $F_2 = B \rightarrow A$, $F_3 = A \vee (B \rightarrow A)$ és $F_4 = (A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$;
 (d) $F_1 = A \wedge (B \vee A)$, $F_2 = (\neg A) \rightarrow (B \wedge A)$, $F_3 = A \wedge ((\neg B) \rightarrow A)$ és $F_4 = (B \rightarrow A) \vee (A \rightarrow B)$.

3.17. Feladat. Állapítsa meg, hogy logikailag ekvivalens-e az alábbi két ítélet:

A Sárkányfűárus pontosan akkor tud árulni a piacon, ha sem Süsü, sem Királyfi nincs a városban.

Süsü vagy Királyfi a városban van, vagy a Sárkányfűárus tud árulni a piacon, valamint ha Süsü vagy Királyfi nincs a városban, akkor a Sárkányfűárus nem tud árulni a piacon.

A primítételek legyenek a következők:

- A: *Süsü a városban van.*
 B: *Királyfi a városban van.*
 C: *A Sárkányfűárus tud árulni a piacon.*

3.18. Feladat. Formalizálja az alábbi ítéleteket a megadott primítételek felhasználásával, és állapítsa meg, hogy logikailag ekvivalensek-e:

Kriszta csak akkor nem bukik meg, ha Mészga Géza pontosan akkor lesz dühös, ha Aladár szivarozni kezd.

Kriszta megbukik vagy Aladár nem kezd el szivarozni vagy Mészga Géza dühös lesz, valamint ha Kriszta nem bukik meg és Aladár sem kezd el szivarozni, akkor Mészga Géza nem lesz dühös.

A primítételek legyenek a következők:

- A: *Kriszta megbukik.*
 B: *Mészga Géza dühös lesz.*
 C: *Aladár szivarozni kezd.*

3.19. Feladat. Állapítsa meg, hogy logikailag ekvivalens-e az alábbi két ítélet:

Szundi pontosan akkor tud aludni, ha Morgó nem morog és Hófehérke sem takarít.

Morgó morog vagy Hófehérke takarít vagy Szundi tud aludni, valamint ha Morgó morog vagy Hófehérke takarít, akkor Szundi nem tud aludni.

A primítételek legyenek a következők:

- A: *Szundi tud aludni.*
 B: *Morgó morog.*
 C: *Hófehérke takarít.*

3.20. Feladat. Formalizálja az alábbi ítéleteket a primitívek alkalmas megváltásával, és állapítsa meg, hogy logikailag ekvivalensek-e:

Ha nem tanulsz vagy puskázol, akkor megbuksz.

Ha nem tanulsz, akkor megbuksz, valamint ha puskázol, akkor is megbuksz.

3.21. Feladat.

Ha a farkas pontosan akkor eszi meg Piroskát, ha megeszi a nagymamát, akkor nem teljesülhet egyszerre, hogy Piroska nem téved el és a farkas nem eszi meg a nagymamát.

Piroska eltéved az erdőben vagy ha a farkas megeszi Piroskát, akkor megeszi a nagymamát is.

3.22. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi formulák közül melyik diszjunktív normálforma, és melyik az A, B, C változókból felépített teljes diszjunktív normálforma:

$$F_1 = A \vee B, \quad F_2 = A \wedge B \wedge (\neg C), \quad F_3 = (A \wedge C) \vee (A \wedge (\neg C)),$$

$$F_4 = (\neg A) \vee B, \quad F_5 = A \vee B \vee (\neg C), \quad F_6 = (A \wedge B \wedge (\neg C)) \vee (A \wedge B \wedge (\neg C)).$$

3.23. Feladat. Határozza meg az A, B, C változókból felépített alábbi formulák teljes diszjunktív normálformáját igazságtáblázataik felhasználásával, illetve az alapvető logikai ekvivalenciák segítségével.

- $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg C)$;
- $((\neg A) \rightarrow (A \wedge B)) \wedge C$;
- $(A \vee B) \rightarrow (\neg(C \rightarrow B))$;
- $(A \vee (\neg B)) \rightarrow (C \leftrightarrow B)$;
- $(A \wedge C) \leftrightarrow ((A \rightarrow (\neg B)) \vee (A \wedge B))$;
- $(\neg(A \rightarrow B)) \wedge (((\neg A) \leftrightarrow C) \vee B)$.

3.24. Feladat. Igazságtáblázatuk felhasználásával, vagy a tautológiagyűjtemény segítségével igazolja, hogy a következő formulák tautológiák:

- $(A \vee B) \rightarrow ((A \vee (\neg B)) \rightarrow A)$;
- $((\neg A) \wedge B) \rightarrow (\neg A) \wedge (((\neg A) \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A))$;
- $((A \vee B \vee C) \wedge (\neg B)) \wedge (\neg C) \rightarrow A$.

3.25. Feladat. Döntse el, hogy az alábbi formulák közül melyik tautológia és melyik nem az:

- $(B \vee (\neg A)) \rightarrow (B \vee (\neg A))$;
- $A \rightarrow (A \wedge B)$;
- $((\neg A) \rightarrow B) \rightarrow A$;
- $(A \vee B) \rightarrow A$;
- $A \vee (B \rightarrow (\neg A))$;
- $(A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$.