

4. feladatsor – Absztrakt algebra MEGOLDÁSOK

4.1. Feladat.

- (a) igen, igen; (b) nem, nem; (c) igen, nem; (d) igen, igen; (e) igen; (f) igen.

4.2. Feladat. .

- (a) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 0, egységeleme: 1, az invertálható elemek halmaza: $\{1, -1\}$;
(b) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 1, egységeleme: -1 , az invertálható elemek halmaza: $\{-1\}$;
(c) A grupoid nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: \emptyset ;
(d) A grupoid nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: \emptyset .

4.3. Feladat. .

- (a) A grupoid nem kommutatív, nem cancellatív, zéruselem nincs, a b elem egységelem, a b és c elemeknek van inverze: $b^{-1} = b$, $c^{-1} = c$;
(b) A grupoid nem kommutatív, nem cancellatív, zéruselem nincs, az a elem egységelem, az a , b és c elemeknek van inverze: $a^{-1} = a$, $b^{-1} = c$, $c^{-1} = b$.

4.4. Feladat. .

- (a) A grupoid asszociatív, nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: \emptyset , félcsoport;
(b) A grupoid nem asszociatív, nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: \emptyset ;
(c) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme: 3, egységeleme: 4, az invertálható elemek halmaza: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Monoid és $(\mathbb{R} \setminus \{3\}; \square)$ csoport;
(d) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme: 2, egységeleme: 3, az invertálható elemek halmaza: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Monoid és $(\mathbb{R} \setminus \{2\}; \triangle)$ csoport;
(e) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza: \emptyset , félcsoport;
(f) A grupoid nem asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme: 0, az invertálható elemek halmaza: $\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}$.

4.5. Feladat.

- (a) félcsoport; (b) monoid; (c) Abel-csoport; (d) Abel-csoport;
(e) Abel-csoport; (f) monoid; (g) monoid; (h) Abel-csoport;
(i) monoid; (j) monoid; (k) monoid; (l) Abel-csoport;
(m) Abel-csoport; (n) monoid.

4.6. Feladat. .

- (a) érvényes;
(b) nem érvényes;
(c) nem érvényes;
(d) érvényes.

4.7. Feladat.

- (a) nem gyűrű; (b) gyűrű; (c) test; (d) test; (e) gyűrű; (f) test;
 (g) gyűrű; (h) gyűrű.

4.8. Feladat.

- (a) $\bar{4}$; (b) $\bar{5}$; (c) $\bar{4}$; (d) $\bar{2}$; (e) $\bar{14}$.

4.9. Feladat.

- (a) $\bar{2}$; (b) $\bar{9}$; (c) $\bar{11}$; (d) nem végezhető el; (e) $\bar{4}$.

4.10. Feladat.

- (a) $\{a\}$; (b) $\{a, b, c\}$; (c) $\{a, b, c\}$; (d) $\{d\}$; (e) $\{a, b, c, d\}$.

T egy minimális generátorrendszere: $\{b, d\}$

4.11. Feladat.

- (a) $\{\bar{0}, \bar{2}\}$; (b) $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$; (c) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$; (d) $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$;
 (e) $(\mathbb{Z}; +)$; (f) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$.

4.12. Feladat.

- (a) $o(\bar{2}) = 2$; (b) $o(\bar{3}) = 4$; (c) $o(\bar{2}) = 3$; (d) $o(i) = 4$.

4.13. Feladat. .

- (a) $\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{4}\}$, $\bar{2}$ nem eleme;
 (b) $2 + H = \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$, $-4 = 3(-2) + 2$ eleme;
 (c) $(3, 4) + H = \{(x + 3, x + 4) : x \in \mathbb{R}\}$, $(-8, -7) = (-11 + 3, -11 + 4)$ eleme;
 (d) $(2, -1) + H = \{(5x + 2, -2x - 1) : x \in \mathbb{Z}\}$, $(17, -5)$ nem eleme.

4.14. Feladat. $\mathbf{A} \cong \mathbf{C} \cong \mathbf{D}$.

- $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$; $0 \mapsto q, 1 \mapsto r, 2 \mapsto p$.
 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$; $p \mapsto 0, q \mapsto 1, r \mapsto -1$.
 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$; $0 \mapsto 1, 1 \mapsto -1, 2 \mapsto 0$.

4.15. Feladat. .

- (a) igaz,
 (b) hamis,
 (c) hamis,
 (d) igaz.

4.16. Feladat. .

- (a) nem,
 (b) igen,
 (c) nem,
 (d) igen,
 (e) igen.