Szigeteljünk! – Egy kutatási téma középiskolásoknak

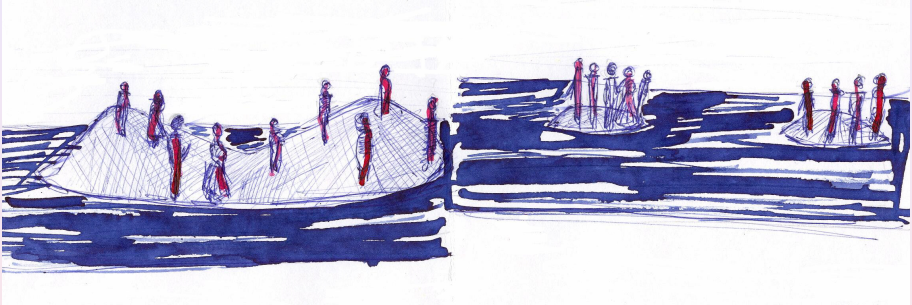
K. Horváth Eszter, Szeged

Társszerzők (időrendi sorrendben): Németh Zoltán, Pluhár Gabriella, Barát János, Hajnal Péter, Szabó Csaba, Horváth Gábor, Branimir Šešelja, Andreja Tepavčević, Máder Attila

Veszprém, 2009. július 10.

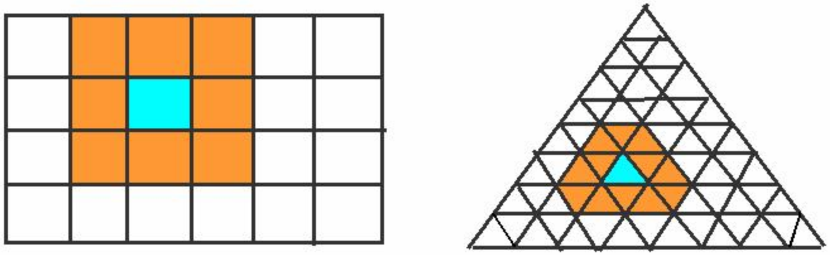
Mi a sziget? Definíció / 1

Mi a sziget? Definíció / 2



Mi a sziget? Definíció / 3

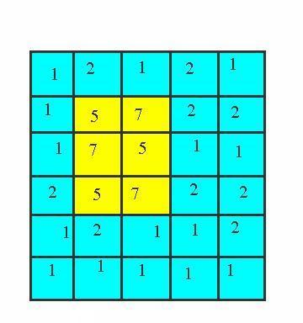
Először szükségünk van egy rácsra. Minden cellának vannak szomszédai, a kék színű cella szomszédait sárga színben látjuk.

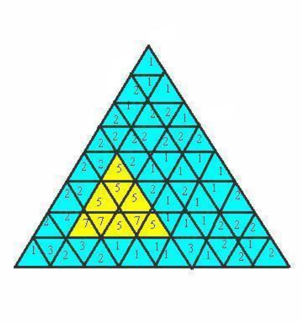


Mi a sziget? Definíció / 4

A cellákba valós számokat írunk. (Ezek az úgynevezett magasságok.) Rögzítünk egy alakzatfajtát (pl. téglalap vagy háromszög).
Egy ilyen rögzített alakzatot *szigetnek* nevezzük, ha a celláiba írt számok mind nagyobbak, mint azokba a cellákba írt számok, amelyek szomszédosak az alakzat valamelyik cellájával.

A baloldali ábrán egy téglalapszigetet, a jobboldali ábrán egy háromszögszigetet látunk sárga színnel bejelölve.





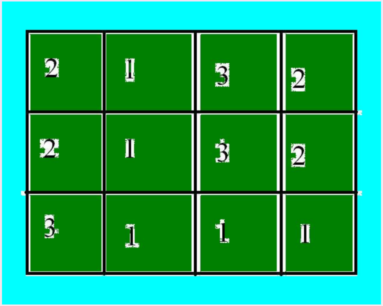
Először tehát kitöltjük a cellákat magasságokkal.
Hány szigetünk van?

2	1	3	2
2	1	3	2
3	1	1	1

Számoljuk meg a szigeteket! / 2

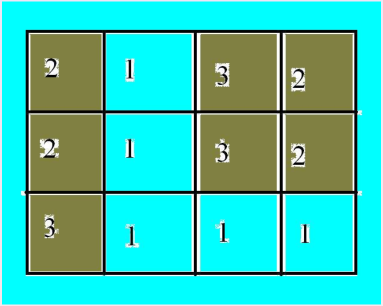
Vízmagasság: 0,5
Szigetek száma: 1

2	1	3	2
2	1	3	2
3	1	1	1



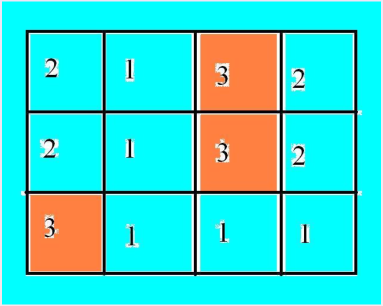
Vízmagasság: 1,5
Szigetek száma: 2

2	1	3	2
2	1	3	2
3	1	1	1



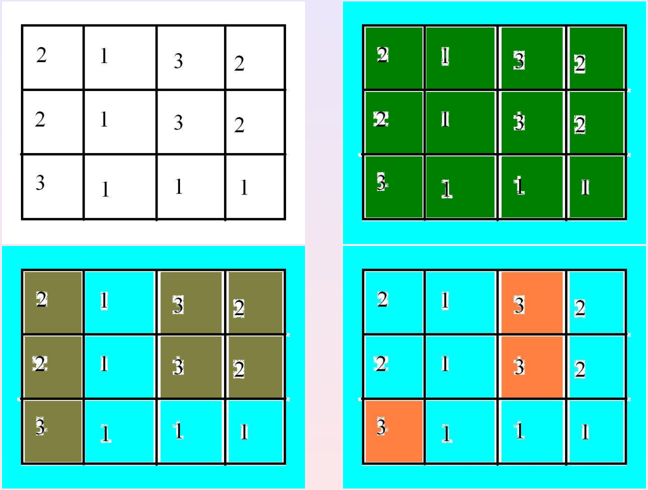
Vízmagasság: 2,5
Szigetek száma: 2

2	1	3	2
2	1	3	2
3	1	1	1



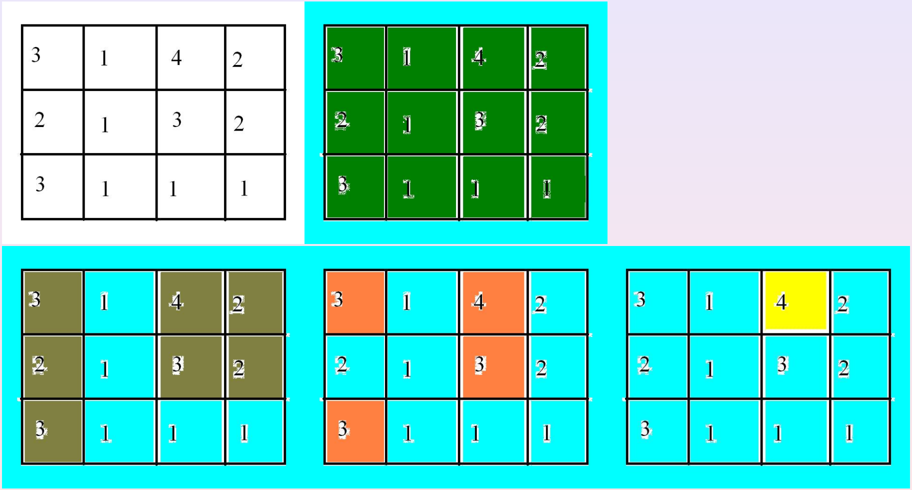
Számoljuk meg a szigeteket! / 5

Összesen tehát: $1 + 2 + 2 = 5$ sziget.



Tudunk-e több szigetet tenni ugyanerre a rácsra? (Más magasságokkal?)

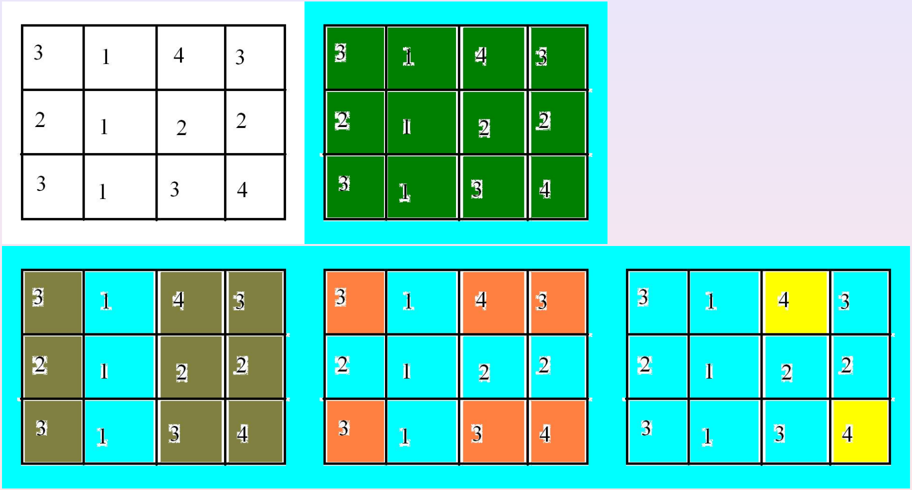
Tudunk több szigetet, íme $1 + 2 + 3 + 1 = 7$ sziget.



Tudunk-e még több szigetet tenni ugyanerre a rácsra?

Számoljuk meg a szigeteket! / 7

Tudunk még több szigetet, íme $1 + 2 + 4 + 2 = 9$ sziget.

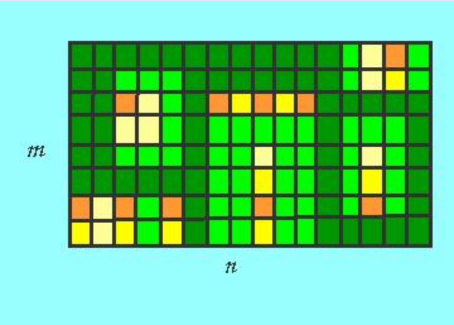


Azonban ennél több sziget NINCS!

Legfeljebb hány sziget keletkezhet egy $m \times n$ méretű rácson? (Czédli Gábor, Szeged, 2007. június 17.)

$$f(m,n) = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right].$$

A formulát hamarosan bebizonyítjuk !
(Az eredeti bizonyítás disztributív hálók segítségével történt, de azóta egyszerűbb módszerek is születtek.)



Miért vagyunk kíváncsiak a szigetek maximális számára? Ez a rész átugorható, ki is hagyható.

Ennyi egyenlőségnek kell teljesülnie ahhoz, hogy egy kódolás prefixmentes legyen. Tehát ennyi egyenlőséget kell ellenőrizni ahhoz, hogy eldöntsük, egy kódolás prefixmentes-e. Miért is?

Innen feleleveníthető a prefixmentes kódolás fogalma:
Czédli Gábor: Boole függvények, Polygon könyvkiadó, Szeged.

Itt pedig szükséges és elegendő feltétel található arra, hogy egy kód prefixmentes legyen:
S. Földes and N. M. Singhi: On instantaneous codes, J. of Combinatorics, Information and System Sci., 31 (2006), 317-326.
$http://rutcor.rutgers.edu/pub/rrr/reports2004/44_2004.pdf$

Ehhez szükséges a szigetek maximális száma!
Teljes szegmens (full segment) = egydimenziós sziget.

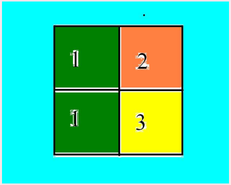
Az $f(m,n) = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right]$ képlet bizonyítása I. rész: VAN legalább ennyi sziget:

Cellák száma szerinti indukcióval bebizonyítjuk, hogy $f(m,n) \geq \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right]$.

Ha $m=1$, akkor $\left[\frac{n+1+n-1}{2}\right] = n$, ha a cellákba rendre az $1,2,3,\ldots,n$ számokat írjuk, akkor éppen n szigetünk lesz, tehát VAN LEGALÁBB ENNYI sziget.

Ha $n=1$, akkor $\left[\frac{m+m+1-1}{2}\right] = m$, ha a cellákba rendre az $1,2,3,\ldots,m$ számokat írjuk, akkor éppen m szigetünk lesz, tehát VAN LEGALÁBB ENNYI sziget.

Ha $m=n=2$, akkor pedig a következő ábrán találunk ennyi szigetet:



Az $f(m,n) = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right]$ képlet bizonyítása, I. rész: VAN LEGALÁBB ENNYI sziget:

Legyen $m, n > 2$.
Először felhasználjuk, hogy TUDUNK felrajzolni legalább 1-gyel több szigetet, mint amennyi az $(m-2) \times n$-es és az $1 \times n$-es téglalapban keletkezhet együttesen legfeljebb (a két téglalap közti cellasávba írjunk kisebb magasságot, mint a két téglalapban található magasságok minimuma, a nagy téglalapon kívül pedig írjunk még kisebb magasságot), ezután alkalmazzuk az indukciós feltevést (azaz a bizonyítandó egyenlőtlenség teljesülését kisebb méretű rácsokra):

$$f(m,n) \geq f(m-2,n) + f(1,n) + 1 \geq \left[\frac{(m-2)n+(m-2)+n-1}{2}\right] + \left[\frac{n+1+n-1}{2}\right] + 1 =$$
$$= \left[\frac{(m-2)n+(m-2)+n-1+2n}{2}\right] + 1 = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right].$$

Az $f(m,n) = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right]$ képlet bizonyítása, II. rész: NINCS TÖBB sziget, A) módszer, teljes indukció

Ha $m = n = 1$, akkor az állítás nyilván igaz. Legyen $m > 1$ vagy $n > 1$. Az indukciós hipotézis: ha $u < m$ vagy $v < n$, akkor
$f(R) = f(u,v) \leq \frac{1}{2}(u+1)(v+1) - 1$.
Legyen $\mathcal{I}^*$ téglapszigetek olyan rendszere, amely maximálisan sok szigetet tartalmaz. Jelölje $\max \mathcal{I}^*$ a maximális szigetek összességét az $\mathcal{I}^*$ szigetrendszer esetére, vagyis azon téglalapszigetek összességét, amelyeknél csak a teljes rács (a nagy téglalap) alkot bővebb szigetet. Egy $u \times v$ méretű téglalap esetén legyen $\|R\| = (u+1)(v+1)$ (a lefedett rácspontok száma). Ekkor
$f(m,n) = 1 + \sum_{R \in \max \mathcal{I}^*} f(R) \leq 1 + \sum_{R \in \max \mathcal{I}^*} \left(\frac{1}{2}\|R\| - 1\right) =$
$= 1 - |\max \mathcal{I}^*| + \frac{1}{2} \sum_{R \in \max \mathcal{I}^*} \|R\| \leq 1 - |\max \mathcal{I}^*| + \frac{1}{2}(m+1)(n+1)$.

Az $f(m,n) = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right]$ képlet bizonyítása, II. rész: NINCS TÖBB sziget, A) módszer, teljes indukció, folytatás

Tehát kaptuk, hogy $f(m,n) \leq 1 - |\max \mathcal{I}^*| + \frac{1}{2}(m+1)(n+1)$.

Ha kettőnél több maximális szigetünk van, akkor a bizonyítás kész.

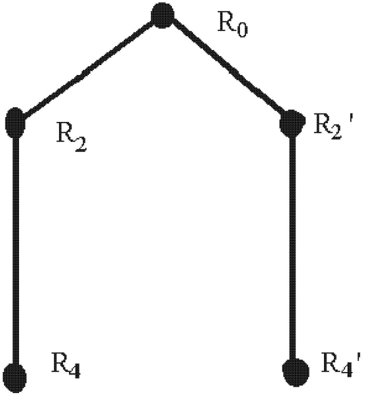
Egyetlen maximális sziget esetén a következő egyenlőtlenségek valamelyike igaz:

$f(m,n) \leq 1 - |\max \mathcal{I}^*| + \frac{1}{2}m(n+1) = 1 - 1 + \frac{1}{2}m(n+1) \leq \frac{1}{2}(m+1)(n+1) - 1.$

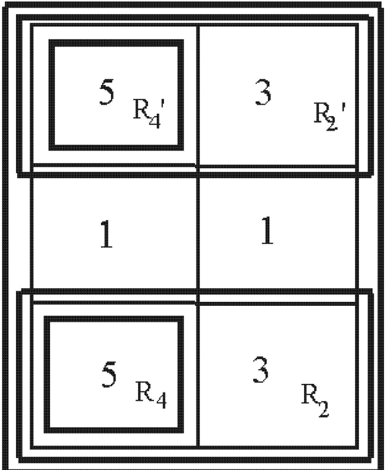
$f(m,n) \leq 1 - |\max \mathcal{I}^*| + \frac{1}{2}(m+1)n = 1 - 1 + \frac{1}{2}(m+1)n \leq \frac{1}{2}(m+1)(n+1) - 1.$

Ha nincs maximális sziget, akkor csak egyetlen sziget van összesen, tehát szintén kész a bizonyítás.

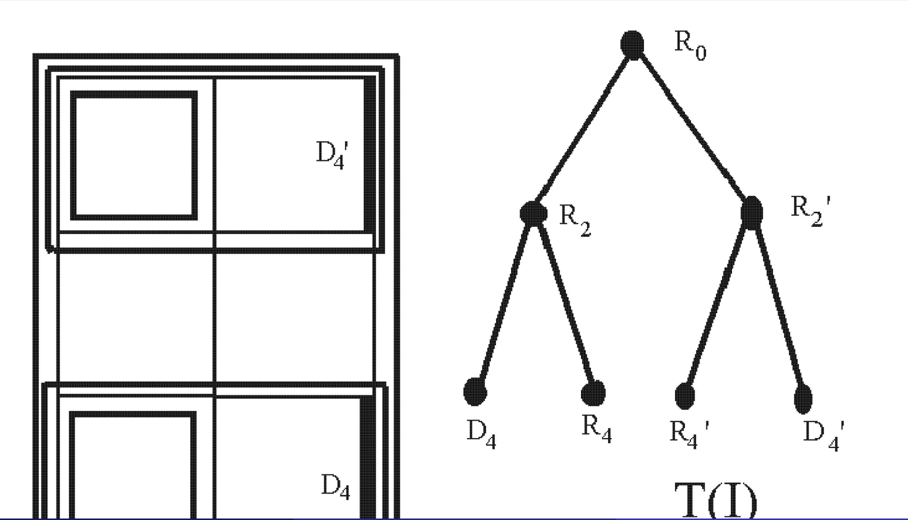
Az $f(m,n) = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right]$ képlet bizonyítása, II. rész: NINCS TÖBB sziget, B) módszer, fagráf módszer



$T_0\,(I)$



Az $f(m,n) = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right]$ képlet bizonyítása, II. rész: NINCS TÖBB sziget, B) módszer, fagráf módszer, folytatás



Az $f(m,n) = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right]$ képlet bizonyítása, II. rész: NINCS TÖBB sziget, B) módszer, fagráf módszer, folytatás

Szigetjeink a tartalmazásra nézve fagráfot alkotnak (a megelőző két dia ábrái szerint).

Segédtétel (most nem bizonyítjuk)
Legyen T olyan fagráf, hogy bármely olyan csúcsának, amelynek van fia, legalább 2 fia van. Legyen ℓ azon csúcsok száma, amelyeknek nincs fia T-ben (ezek az úgynevezett "levelek" a fagráfban). A fagráf csúcsainak számát $|V|$ jelöli.
Ekkor $|V| \leq 2\ell - 1$.

Az $f(m,n) = \left[\frac{mn+m+n-1}{2}\right]$ képlet bizonyítása, II. rész: NINCS TÖBB sziget, B) módszer, fagráf módszer, folytatás

Segédtétel: $|V| \leq 2\ell - 1$.

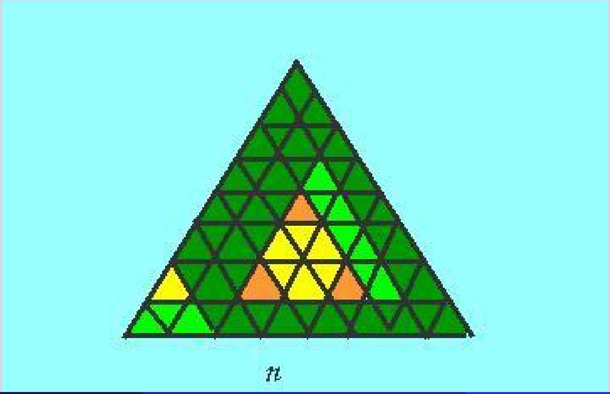
Az előző ábrákon bemutatott képzeletbeli szigetek segítségével nekünk most ilyen fagráfunk van. Képzeletbeli sziget akkor keletkezik, ha a vízszint emelkedésekor a sziget nem tűnik el, és nem is osztódik több részre. (A bevezető rajzok közül első rajzon van képzeletbeli sziget, a második rajzon kettéosztódik egy sziget.) Jelöljük a minimális szigetek számat s-sel, a képzeletbeli szigetek számat d-vel. Ekkor nyilvánvalóan $4s + 2d \leq (n+1)(m+1)$, hiszen a minimális szigetek legalább 4, a képzeletbeli szigetek legalább 2 rácspontot fednek le, együttesen pedig lefedik az egész rácsot.

A fagráf leveleinek számáról tudjuk, hogy $\ell = s + d$. A Segédtételt felhasználva:

$$|V| - d \leq (2\ell - 1) - d = 2s + d - 1 \leq \frac{1}{2}(n+1)(m+1) - 1.$$

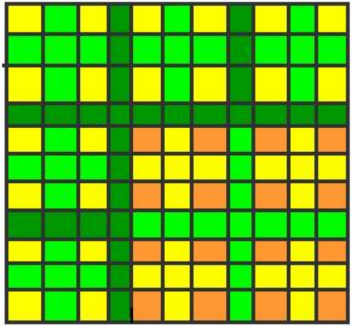
Háromszögrács, háromszögszigetek

Jelöljük $f(n)$-nel a háromszögszigetek maximális számát az n oldalhosszúságú egyelő oldalú háromszögben. A következő egyenlőtlenséget sikerült bizonyítani a háromszögszigetek maximális számára, amelyet $f(n)$ jelöl: $\frac{n^2+3n}{5} \leq f(n) \leq \frac{3n^2+9n+2}{14}$.
Pontos formula még nincs !!!



Négyzet alakú szigetek (magasabb dimenzióban is)

Jelöljük r-relés s-sel a téglalap oldalain található rácspontok számát. A négyzet alakú szigetek maximális számára, melyet $f(r,s)$ jelöl, az alábbi egyenlőtlenséget sikerült bizonyítani: $\frac{1}{3}(rs-2r-2s) \leq f(r,s) \leq \frac{1}{3}(rs-1)$. Pontos formula itt sincs !!!



Pontos eredmények

Félsziget: $p(m,n) = f(m,n) = [(mn+m+n-1)/2]$.

Téglalapszigetek hengeren:
Ha $n \geq 2$, akkor $h_1(m,n) = [\frac{(m+1)n}{2}]$.

Hengeren téglalap és henger alakú szigetek:
Ha $n \geq 2$, akkor $h_2(m,n) = [\frac{(m+1)n}{2}] + [\frac{(m-1)}{2}]$.

Téglalapszigetek tóruszon:
Ha $m, n \geq 2$, akkor $t(m,n) = [\frac{mn}{2}]$.

Pontos eredmények

Félsziget: $p(m,n) = f(m,n) = [(mn+m+n-1)/2]$.

Téglalapszigetek hengeren:
Ha $n \geq 2$, akkor $h_1(m,n) = [\frac{(m+1)n}{2}]$.

Hengeren téglalap és henger alakú szigetek:
Ha $n \geq 2$, akkor $h_2(m,n) = [\frac{(m+1)n}{2}] + [\frac{(m-1)}{2}]$.

Téglalapszigetek tóruszon:
Ha $m, n \geq 2$, akkor $t(m,n) = [\frac{mn}{2}]$.

Pontos eredmények

Félsziget: $p(m,n) = f(m,n) = [(mn + m + n - 1)/2]$.

Téglalapszigetek hengeren:
Ha $n \geq 2$, akkor $h_1(m,n) = [\frac{(m+1)n}{2}]$.

Hengeren téglalap és henger alakú szigetek:
Ha $n \geq 2$, akkor $h_2(m,n) = [\frac{(m+1)n}{2}] + [\frac{(m-1)}{2}]$.

Téglalapszigetek tóruszon:
Ha $m, n \geq 2$, akkor $t(m,n) = [\frac{mn}{2}]$.

Pontos eredmények

Félsziget: $p(m,n) = f(m,n) = [(mn + m + n - 1)/2]$.

Téglalapszigetek hengeren:
Ha $n \geq 2$, akkor $h_1(m,n) = [\frac{(m+1)n}{2}]$.

Hengeren téglalap és henger alakú szigetek:
Ha $n \geq 2$, akkor $h_2(m,n) = [\frac{(m+1)n}{2}] + [\frac{(m-1)}{2}]$.

Téglalapszigetek tóruszon:
Ha $m, n \geq 2$, akkor $t(m,n) = [\frac{mn}{2}]$.

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Egydimenziós sziget

0	0	1	1	1	0	0	0

Szigetek száma: 1

0	1	2	2	1	0	1	2	1	2

Szigetek száma: 5

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

A feladat:

Legfeljebb hány sziget keletkezhet egy n hosszúságú négyzetrácson, ha a cellákba írt magasságok csak a következők lehetnek: $0, 1, 2, \ldots, h$; ahol $h \geq 1$. Feltételezzük, hogy a cellasor két végén 0 található (tehát a 0-dik és az $n+1$-edik cellában a magasság 0).

A megoldás:
$I(n,h) = n - \left[\frac{n}{2^h}\right].$

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Először h szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy van legalább $n - \left[\frac{n}{2^h}\right]$ számú sziget, méghozzá olyan módon, hogy minden második cella h magasságú, az elsővel kezdve.

$h = 1$:
$I(n,h) \geq n - \left[\frac{n}{2}\right]$.
1-essel kezdve felváltva írunk 1-est és 0-t, így éppen ennyi szigetet kapunk.

Ezután legyen $h > 1$.

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Legyen először $n = 4k$. Az indukciós feltevés: $2k$ számú cellán az $0, 1, \ldots, h-1$ magasságokkal keletkezhet legalább

$$2k - \left[\frac{2k}{2^{h-1}}\right]$$

sziget, és minden második cella magassága $h-1$, az elsővel kezdve. Ekkor a $h-1$-es magasságú cellák helyére három cellát "betoldunk" h, $h-1$, h magasságokkal. Ezen a módon $n = 4k$ cella keletkezik

$$2k - \left[\frac{2k}{2^{h-1}}\right] + 2k = 4k - \left[\frac{4k}{2^h}\right]$$

számú szigettel. Az ábrán $h = 3$; az eredetileg 2 magasságú cella helyére három cellát illesztettünk be 3, 2, 3 magasságokkal.

3	2	3	1	3	2	3	0	3	2	3	1

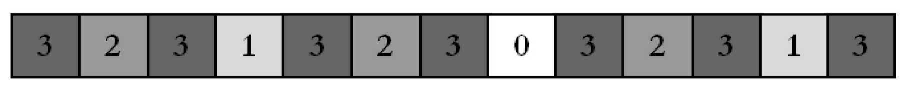
Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Legyen most $n = 4k + 1$. Ekkor a végére illesztett h magasságú cellával van

$$4k + 1 - \left[\frac{4k}{2^h}\right]$$

szigetünk, azonban

$$4k + 1 - \left[\frac{4k}{2^h}\right] \geq 4k + 1 - \left[\frac{4k+1}{2^h}\right].$$



Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Legyen most $n = 4k + 2$. Ekkor a végére illesztett h és $h - 1$ magasságú cellákkal van

$$4k + 2 - \left[\frac{4k}{2^h}\right]$$

szigetünk, azonban

$$4k + 2 - \left[\frac{4k}{2^h}\right] \geq 4k + 2 - \left[\frac{4k + 2}{2^h}\right].$$

3	2	3	1	3	2	3	0	3	2	3	1	3	2

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Legyen most $n = 4k + 3$. Ekkor a végére illesztett h, $h-1$ és h magasságú cellákkal van

$$4k + 3 - \left[\frac{4k}{2^h}\right]$$

szigetünk, azonban

$$4k + 3 - \left[\frac{4k}{2^h}\right] \geq 4k + 3 - \left[\frac{4k+3}{2^h}\right].$$

3	2	3	1	3	2	3	0	3	2	3	1	3	2	3

Tehát beláttuk, hogy

$$I(n, h) \geq n - \left[\frac{n}{2^h}\right].$$

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Most belátjuk, hogy nincs több sziget, vagyis

$$I(n,h) \leq n - \left[\frac{n}{2^h}\right],$$

n szerinti indukcióval.

Ha $n = 1$, akkor az állítás igaz.

Legyen $n > 1$. Az indukciós feltevés: bármely $n' < n$ esetén

$$I(n',h) = n' - \left[\frac{n'}{2^h}\right].$$

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Először feltesszük, hogy van 0 magaságú cellánk. Egy ilyen 0-t tartalmazó cella k and l hosszúságú részre osztja a cellasort, ahol $k+l+1=n$, $k,l \geq 0$. Ha a szigetek száma most $|\mathcal{I}|$, akkor

$$|\mathcal{I}| \leq k - \left[\frac{k}{2^h}\right] + l - \left[\frac{l}{2^h}\right] = k+l+1 - \left(\left[\frac{k}{2^h}\right] + \left[\frac{l}{2^h}\right] + 1\right).$$

Először belátjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\left[\frac{k}{2^h}\right] + \left[\frac{l}{2^h}\right] + 1 \geq \left[\frac{k+l+1}{2^h}\right].$$

Ehhez felhasználjuk az alábbiakat:

$$\left[\frac{k+l+1}{2^h}\right] \leq \frac{k}{2^h} + \frac{l}{2^h} + \frac{1}{2^h} \leq \left[\frac{k}{2^h}\right] + \frac{2^h-1}{2^h} + \left[\frac{l}{2^h}\right] + \frac{2^h-1}{2^h} + \frac{1}{2^h} =$$

$$= \left[\frac{k}{2^h}\right] + \left[\frac{l}{2^h}\right] + \frac{2^{h+1}-1}{2^h}.$$

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Vegyük az egészrészét a következő (imént kapott) egyenlőtlenség mindkét oldalának:

$$\left[\frac{k+l+1}{2^h}\right] \leq \left[\frac{k}{2^h}\right] + \left[\frac{l}{2^h}\right] + \frac{2^{h+1}-1}{2^h},$$

kapjuk:

$$\left[\frac{k+l+1}{2^h}\right] \leq \left[\frac{k}{2^h}\right] + \left[\frac{l}{2^h}\right] + 1.$$

Ez utóbbiból pedig adódik a következő:

$$|I| \leq k+l+1-\left(\left[\frac{k}{2^h}\right] + \left[\frac{l}{2^h}\right] + 1\right) \leq k+l+1-\left[\frac{k+l+1}{2^h}\right] = n-\left[\frac{n}{2^h}\right].$$

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Ha nem használjuk a 0 magasságot, akkor először m-et írjunk a határoló cellákba (a 0-dik és az $n+1$-edik cellába), ahol m a celláinkban szereplő számok minimuma. Az előbb igazoltak miatt legfeljebb

$$n - \left[\frac{n}{2^{h-m}}\right]$$

szigetünk van. Csökkentjük a határcellák magasságát $m-1$-re, ekkor a teljes cellasor szigetté válik, vagyis most legfeljebb

$$n - \left[\frac{n}{2^{h-m}}\right] + 1$$

szigetünk van. Mivel $\left[\frac{n}{2^{h-m}}\right] \geq \left[\frac{n}{2^{h-1}}\right]$, kapjuk, hogy

$$n - \left[\frac{n}{2^{h-m}}\right] + 1 \leq n - \left[\frac{n}{2^{h-1}}\right] + 1.$$

Egy középiskolás "versenyfeladat", megoldással

Azonban

$$n - \left[\frac{n}{2^{h-1}}\right] + 1 = n - \left[\frac{2n - 2^h}{2^h}\right].$$

Ha $n \geq 2^h$, akkor $2n - 2^h \geq n$, tehát legfeljebb

$$n - \left[\frac{2n - 2^h}{2^h}\right] \leq n - \left[\frac{n}{2^h}\right]$$

szigetünk van.

Ha $n < 2^h$, akkor $\left[\frac{n}{2^h}\right] = 0$, tehát elég belátni, hogy a szigetek száma az n hosszúságú cellasoron nem lehet több, mint n (h-tól függetlenül). Ezt n szerinti indukcióval látjuk be. Ha $n = 1$, akkor legfeljebb egyetlen szigetünk van. Legyen $n > 1$. Az indukciós feltevés: ha $n' < n$, akkor az n' hosszúságú cellasoron a szigetek száma nem haladhatja meg n'-t. Egy minimális magasságú cella k és $n - k - 1$ hosszúságú részre osztja az n hosszúságú cellasort, ahol $k \geq 0$. Azonban a teljes cellasor lehet sziget, vagyis az indukciós feltevés alkalmazása után adódik, hogy a szigetek száma legfeljebb $k + n - k - 1 + 1 = n$.

Téglalapszigetek hengeren (bizonyítás)

Törlünk egy cellaoszlopot, $m \times (n-1)$ méretű téglalapot kapunk. Ezért

$$c_1(m,n) \geq f(m,n-1) + 1 = [(mn+n)/2]\,.$$

Legyen $\mathcal{I}^*$ maximális sok szigetet tartalmazó szigetrendszer. Ekkor

$$c_1(m,n) = 1 + \sum_{R \in max\mathcal{I}^*} f(R) = 1 + \sum_{R \in max\mathcal{I}^*} \left(\left[\frac{(u+1)(v+1)}{2} \right] - 1 \right) =$$

$$= 1 - |max(\mathcal{I}^*)| + \sum_{R \in max\mathcal{I}^*} \left[\frac{(u+1)(v+1)}{2} \right] \leq$$

$$\leq 1 - 1 + \left[\frac{(m+1)n}{2} \right] = \left[\frac{(m+1)n}{2} \right].$$

Nyilván $-|max(\mathcal{I}^*)| \leq -1$ ha $|max(\mathcal{I}^*)| \geq 1$; valamint ábra felrajzolásával kiderül, hogy

$$\sum_{R \in max\mathcal{I}^*} \left[\frac{(u+1)(v+1)}{2} \right] \leq \left[\frac{(m+1)n}{2} \right].$$

Téglalapszigetek tóruszon (bizonyítás)

Méret: $m \times n$.

Egy oszlopot és egy sort kihagyva $(m-1) \times (n-1)$ téglalap adódik. Ezért:

$$t(m,n) \geq f(m-1,n-1) + 1 = \left[\frac{mn}{2}\right].$$

Ismét $\mathcal{I}^*$ egy maximálisan sok szigetet tartalmazó szigetrendszer. Ekkor

$$t(m,n) = 1 + \sum_{R \in max \mathcal{I}^*} f(R) = 1 + \sum_{R \in max \mathcal{I}^*} \left(\left[\frac{(u+1)(v+1)}{2}\right] - 1 \right) =$$

$$= 1 - |max(\mathcal{I}^*)| + \sum_{R \in \max \mathcal{I}^*} \left[\frac{(u+1)(v+1)}{2}\right] \leq 1 - 1 + \left[\frac{mn}{2}\right] = \left[\frac{mn}{2}\right].$$

Ismét felhasználtuk, hogy $-|max(\mathcal{I}^*)| \leq -1$ ha $|max(\mathcal{I}^*)| \geq 1$, továbbá azt is, hogy

$$\sum_{R \in \max \mathcal{I}^*} \left[\frac{(u+1)(v+1)}{2}\right] \leq + \left[\frac{mn}{2}\right].$$

Néhány megoldatlan probléma

Oldjuk meg az előző feladatot 2 dimenzióban.

Határozzuk meg a szigetek maximális számát gömbre. Először a cellákra való felosztást kell megoldani. A földgömbön a szélességi és hosszúsági körök olyan felosztást adnak, hogy a sarkokon probléma lép fel a szomszédok számával kapcsolatban.

Javaslataim a beadandó dolgozattal kapcsolatban

1. Szakköri vázlat a témából, szakmódszertani megjegyzésekkel, különféle életkorokra és iskolatípusokra "méretezve"
2. Középiskolás feladatok gyűjtése és rendszerezése, amelyek megoldási módszerei kapcsolatba hozhatók az előadáson megismert problémák megoldási módszereivel
3. Újabb szigetes problémák és azok megoldásai, megoldott problémák új megoldásai
4. Szigetek szemléltetése (számítógéppel is)

A témával kapcsolatban angol nyelvű irodalom található a honlapom "Publications " menüpontjában.