

# VEKTORTEREK I.

## VEKTORTÉR, ALTÉR, GENERÁTORRENDSZER

2004. október 15.

### IRODALOM

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangznak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:

Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003, 6. fejezet (Vektortér, altér, generálás);

#### további ajánlott irodalom:

Nincs.

### TOVÁBBI AJÁNLOTT FELADATOK

## A VEKTORTÉR DEFINÍCIÓJA, PÉLDÁK.

**1. Feladat.** Igazolja, hogy a jegyzetben felsorolt (6. fejezet, 6.2.) példákban szereplő struktúrák valóban vektorterek.

**2. Feladat.** Vektorteret alkotnak-e (a valós számok teste felett a szokásos műveletekkel) a következő halmazok?

- (a)  $\mathbb{R}^n$ , azaz az összes valós szám  $n$ -esek;
- (b) az összes  $[0, 1]$ -en értelmezett valós függvények, (amelyek tehát a  $[0, 1]$  zárt intervallumot  $\mathbb{R}$ -be képezik le);
- (c) az összes  $\{0, 1\}$ -en értelmezett valós függvények, (amelyek tehát a  $\{0, 1\}$  halmazt  $\mathbb{R}$ -be képezik le);
- (d) az összes  $\mathbb{Z}$ -n értelmezett valós függvények, (amelyek tehát az egész számok halmazát  $\mathbb{R}$ -be képezik le), jelölés:  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} = \{f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ;
- (e) az összes  $\mathbb{R}$ -en értelmezett egész függvények, (amelyek tehát a valós számok halmazát  $\mathbb{Z}$ -be képezik le), jelölés:  $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}} = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}\}$ ;
- (f)  $\{(a, b, c): a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ , azaz az egész számhármak halmaza;
- (g)  $\{(a, b): a, b \in \mathbb{R}^+\}$ , azaz a pozitív valós számpárok halmaza;
- (h) a valós együtthatós polinomok  $\mathbb{R}[x]$  halmaza;
- (i) adott  $n \in \mathbb{N}$ -nél nem nagyobb fokszámú valós együtthatós polinomok, halmazuk szokásos jelölése  $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ .

*Megoldás.* Példaként megmutatjuk, hogy az  $\mathbb{R}$ -et  $\mathbb{Z}$ -be képező függvények (leképezések) halmaza nem alkot vektorteret a valós számtest felett.

Két ilyen leképezés összege is  $\mathbb{R}$ -ből  $\mathbb{Z}$ -be menő leképezés, mivel az összeadás definíciója szerint  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ , és ha  $f(x)$  és  $g(x)$  minden  $x$ -re egész szám, akkor az összegük is az.

Ha  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  és  $\alpha \in \mathbb{R}$ , akkor  $\alpha f$  nem feltétlenül  $\mathbb{Z}$ -be képez, mivel a definíció szerint  $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ , ami biztosan nem egész, pl. ha  $\alpha$  irracionális.

Így az  $\mathbb{R}$ -ből  $\mathbb{Z}$ -be menő leképezések nem alkotnak vektorteret a valós számtest felett. Másrészt megmutatjuk, hogy a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok (halmazukat jelölje:  $\mathbb{R}_4[x]$ ) vektorteret alkotnak a valós számtest felett a szokásos műveletekre:

$$\begin{aligned} (a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) &= \\ &= (a_3 + b_3)x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \\ \alpha(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) &= (\alpha a_3)x^3 + (\alpha a_2)x^2 + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0). \end{aligned}$$

A műveletek definíciója alapján látjuk, hogy

ha  $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$ , akkor  $f + g$  egy egyértelműen meghatározott, legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinom, azaz  $f + g \in \mathbb{R}_4[x]$ ;

ha  $f \in \mathbb{R}_4[x]$  és  $\alpha \in \mathbb{R}$ , akkor  $\alpha f$  is egy egyértelműen meghatározott, legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinom, azaz  $\alpha f \in \mathbb{R}_4[x]$ .

Tehát mind az összeadás, mind a skalárral való szorzás jól értelmezett ezen a halmazon. Ellenőrizzük sorra, teljesülnek-e erre a két műveletre a vektortér-axiómák:

- (1) Az együtthatók valós számok, a valós számok összeadása kommutatív, így az  $\mathbb{R}_4[x]$ -beli összeadás is kommutatív.
- (2) Hasonlóan adódik az  $\mathbb{R}_4[x]$ -beli összeadás asszociativitása is.
- (3) A zéruspolinom ( $0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ ) valós együtthatós, legfeljebb harmadfokú, és bármely  $f \in \mathbb{R}_4[x]$  polinomra  $0 + f = f$ , így tehát  $\mathbb{R}_4[x]$ -ben van egységelem az összeadásra vonatkozóan.
- (4) Ha  $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$ , akkor a  $g = (-a)x^3 + (-b)x^2 + (-c)x + (-d)$  polinom szintén valós együtthatós és legfeljebb harmadfokú, azaz  $g \in \mathbb{R}_4[x]$ , és nyilván  $f + g = 0$ ; így minden  $f \in \mathbb{R}_4[x]$ -nek van additív inverze. (Ezt a polinomot általában  $-f$ -el szokás jelölni és az  $f$  ellentettjének is nevezzük.)
- (5) Ha  $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$ ,  $g = ex^3 + hx^2 + ix + j \in \mathbb{R}_4[x]$ , és  $\alpha \in \mathbb{R}$ , akkor

$$\begin{aligned} \alpha(f + g) &= \alpha((a + e)x^3 + (b + h)x^2 + (c + i)x + (d + j)) = \\ &= \alpha(a + e)x^3 + \alpha(b + h)x^2 + \alpha(c + i)x + \alpha(d + j) = \\ &= (\alpha a + \alpha e)x^3 + (\alpha b + \alpha h)x^2 + (\alpha c + \alpha i)x + (\alpha d + \alpha j) = \\ &= (\alpha ax^3 + \alpha bx^2 + \alpha cx + \alpha d) + (\alpha ex^3 + \alpha hx^2 + \alpha ix + \alpha j) = \\ &= \alpha f + \alpha g. \end{aligned}$$

- (6) Ha  $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$ , és  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , akkor

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)f &= (\alpha + \beta)ax^3 + (\alpha + \beta)bx^2 + (\alpha + \beta)cx + (\alpha + \beta)d = \\ &= (\alpha a + \beta a)x^3 + (\alpha b + \beta b)x^2 + (\alpha c + \beta c)x + (\alpha d + \beta d) = \\ &= (\alpha ax^3 + \alpha bx^2 + \alpha cx + \alpha d) + (\beta ax^3 + \beta bx^2 + \beta cx + \beta d) = \\ &= \alpha f + \beta f. \end{aligned}$$

(7) Ha  $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$ , és  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , akkor

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)f &= (\alpha\beta)ax^3 + (\alpha\beta)bx^2 + (\alpha\beta)cx + (\alpha\beta)d = \\ &= \alpha(\beta a)x^3 + \alpha(\beta b)x^2 + \alpha(\beta c)x + \alpha(\beta d) = \\ &= \alpha((\beta a)x^3 + (\beta b)x^2 + (\beta c)x + \beta d) = \\ &= \alpha(\beta f). \end{aligned}$$

(8) Ha  $f = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_4[x]$ , akkor

$$1f = (1 \cdot a)x^3 + (1 \cdot b)x^2 + (1 \cdot c)x + 1 \cdot d = ax^3 + bx^2 + cx + d = f.$$

Vagyis minden axióma teljesül,  $\mathbb{R}_4[x]$  tehát vektortér  $\mathbb{R}$  fölött.

**3. Feladat.** Vizsgálja meg, hogy a valós számpárok halmaza vektorteret alkot-e a valós számok teste felett, ha a műveleteket a következőképpen definiáljuk:

- (a)  $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$  és  $\alpha(a, b) := (\alpha a, b)$ ;
- (b)  $(a, b) + (c, d) := (3b + 3d, -a - c)$  és  $\alpha(a, b) := (3\alpha b, -\alpha a)$ ;
- (c)  $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$  és  $\alpha(a, b) := (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$ ;
- (d)  $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$  és  $\alpha(a, b) := (\alpha a, 0)$ .

**4. Feladat.** A pozitív valós számok  $\mathbb{R}^+$  halmazában a  $\oplus$  „összeadás” legyen a következő:  $a \oplus b = ab$ , a  $\lambda$  valós számmal való  $\odot$  „szorzást” pedig a következőképpen definiáljuk:  $\lambda \odot a = a^\lambda$ . Bizonyítsa be, hogy az  $\mathbb{R}^+$  halmaz az így definiált műveletekkel vektortér a valós számok teste felett.

**5. Feladat.** Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test felett. Melyek igazak az alábbi állítások közül ( $u, v \in V$ ,  $\lambda, \mu \in T$ ):

- (a) Ha  $v \neq 0$  és  $\lambda v = \mu v$ , akkor  $\lambda = \mu$ .
- (b) Ha  $\lambda \neq 0$  és  $\lambda v = \lambda u$ , akkor  $v = u$ .
- (c) Ha  $v \neq 0, u \neq 0, \lambda \neq 0, \mu \neq 0$  és  $\lambda u = \mu v$ , akkor  $u = v$  és  $\lambda = \mu$ .

\* \* \* \* \*

## ALTEREK.

**6. Feladat.** Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test felett. Igazolja, hogy a  $V$  egy nemüres  $U$  részhalmaza pontosan altere  $V$ -nek, ha bármely  $u, v \in U$  és bármely  $\lambda, \mu \in T$  esetén  $\lambda u + \mu v \in U$ .

**7. Feladat.** A  $V$  valós vektortér  $U$  részhalmazára nézve az alábbi feltételek melyike ekvivalens azzal, hogy  $U$  altér  $V$ -ben:

- (a)  $(\forall x, y \in U)(\forall a \in \mathbb{R}) : ax + y \in U$ ;
- (b)  $(\forall x, y \in U)(\forall a \in \mathbb{R}) : ax + ay \in U$ ;
- (c)  $(\forall x, y \in U)(\forall a \in \mathbb{R}) : ax - ay \in U$ .

**8. Feladat.** Állapítsa meg, hogy a valós számhármások következő részhalmazai közül melyek alkotnak alteret az  $\mathbb{R}^3$  vektortérben:

- (a)  $U = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 = 0\}$ ;
- (b)  $U = \{(x_1, x_2, x_3): x_2 = 0\}$ ;
- (c)  $U = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 = x_2 = 0\}$ ;
- (d)  $U = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 = 0 \text{ vagy } x_2 = 0\}$ ;
- (e)  $U = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 = 0\}$ ;
- (f)  $U = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 = 1\}$ ;
- (g)  $U = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 \geq 0\}$ .

**Megoldás.** Alkalmazzuk az alábbi tételt (ld. a jegyzetben, 6.7. Tétel 2. állítása)

*Ha  $V$  vektortér a  $T$  számtest felett, akkor  $V$  valamely  $U$  nem üres részhalmaza akkor, és csak akkor altér, ha zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra, azaz bármely  $u, v \in U$  és  $\lambda \in T$  esetén  $u + v, \lambda u \in U$ .*

Példaként megvizsgáljuk az (f)-beli  $U$  részhalmazt:

1. Megoldás: Legyen  $u = (1, 0, 0) \in U$  és  $v = (0, 1, 0) \in U$ , ekkor  $u + v = (1, 1, 0)$ , ahol  $x_1 + x_2 = 2$ , tehát  $u + v \notin U$ , azaz  $U$  nem zárt az összeadásra, ezért a tétel alapján  $U$  nem altér  $\mathbb{R}^3$ -ban.

2. Megoldás: Tudjuk, hogy minden altér tartalmazza a vektortér zérusvektorát (ld. 6.7.1.). Mivel  $\underline{0} = (0, 0, 0)$  az  $\mathbb{R}^3$  nullvektora és  $\underline{0} = (0, 0, 0) \notin U$ , ezért  $U$  nem lehet altér  $\mathbb{R}^3$ -ban.

**9. Feladat.** Határozza meg, hogy  $\mathbb{R}^4$  következő részhalmazai közül melyek alterek:

- (a)  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$ ;
- (b)  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): 2x_1 - 3x_2 = 1\}$ ;
- (c)  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$ ;
- (d)  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ ;
- (e)  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ ;
- (f)  $U = \{(a + 2b, a, 2a - b, b): a, b \in \mathbb{R}\}$ ;
- (g)  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ ;
- (h)  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1x_4 = x_2x_3\}$ ;

**Megoldás.** Példaként megvizsgáljuk a (c)-beli  $U$  részhalmazt:

Legyen  $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U, v = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in U$ , azaz olyan számnégyesek melyre  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ , valamint  $y_1 + y_2 = y_3 + y_4$  teljesül.

Ekkor  $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$ , és

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_3 + x_4) + (y_3 + y_4) = (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)$$

ami azt jelenti, hogy  $u + v \in U$  teljesül.  $U$  tehát zárt az összeadásra.

Legyen  $u = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$ , tehát  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ . Ekkor tetszőleges  $\lambda \in \mathbb{R}$ -re  $\lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ , és mivel

$$\lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda(x_3 + x_4) = \lambda x_3 + \lambda x_4,$$

ezért  $\lambda u \in U$ , vagyis  $U$  a skalárral való szorzásra is zárt.

Az előző feladat megoldásában már idézett tétel alapján  $U$  altér  $\mathbb{R}^4$ -ben.

**10. Feladat.** Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $U$  a  $V$  egy nemtriviális altere. Melyek igazak az alábbi állítások közül ( $u, v \in V, \lambda, \mu \in T$ ):

- (1) ha  $u + v \in U$ , akkor  $u, v \in U$ ;
- (2) ha  $\lambda \neq 0$  és  $\lambda v \in U$ , akkor  $v \in U$ ;
- (3) ha  $u \in U, v \notin U$ , akkor  $u + v \notin U$ ;
- (4) ha  $u \notin U, v \notin U$ , akkor  $u + v \notin U$ ;
- (5) ha  $u \notin U, v \notin U$ , akkor  $u + v \in U$ .

**11. Feladat.** A valós számtest fölötti  $n \times n$ -es mátrixok vektorterében mely részhalmazok alkotnak alteret:

- (1) az  $n \times n$ -es alsó trianguláris mátrixok halmaza;
- (2) az  $n \times n$ -es szimmetrikus mátrixok halmaza;
- (3) az  $n \times n$ -es nemelfajuló mátrixok halmaza;
- (4) az  $n \times n$ -es elfajuló mátrixok halmaza;
- (5)  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n}: A^2 = 0\}$ ;
- (6)  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n}: AB = 0\}$ , ahol  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  egy rögzített mátrix;
- (7)  $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n}: AB = BA\}$ , ahol  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  egy rögzített mátrix;

**12. Feladat.** Alteret alkot-e  $\mathbb{R}^n$ -ben azon  $(x_1, \dots, x_n)$  vektorok részhalmaza, melyekre:

- (a)  $x_i = 0$  valamely  $1 \leq i \leq n$ -re;
- (b)  $x_1 + 2x_2 = 0$ ;
- (c)  $x_1 = x_n$ ;
- (d)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a, \quad (a \in \mathbb{R})$ ;
- (e)  $x_i \in \mathbb{Z}$ , minden  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re;
- (f)  $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0$ ;
- (g)  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ;
- (h) az összes olyan valós szám  $n$ -esek, amelyeknek minden „páratlanadik” komponense zérus (azaz  $x_1 = x_3 = \dots = 0$ );
- (i)  $x_1 = x_3 = \dots$ , azaz az összes olyan valós szám  $n$ -esek, amelyeknek minden „páratlanadik” komponense egyenlő;

**13. Feladat.** Adjunk példát olyan vektortérre és abban olyan részhalmazra, amely

- (a) az összeadásra zárt, de a skalárral való szorzásra nem;
- (b) az összeadásra nem zárt, de a skalárral való szorzásra igen;
- (c) sem az összeadásra, sem a skalárral való szorzásra nem zárt.

**14. Feladat.** Geometriai vektorok terében:

- (1) az összes térbeli vektorok terében azon vektorok halmaza, melyek végpontjai egy egyenesen vannak;
- (2) az összes síkbeli vektorok terében azon vektorok halmaza, amelyek az első síknegyedben vannak;
- (3) az összes térbeli vektorok, amelyek végpontja egy adott síkban van;
- (4) az összes síkbeli vektorok, amelyek végpontja az első síknegyedben van;
- (5) az összes síkbeli vektorok, amelyek végpontja az első vagy a harmadik síknegyedben van;
- (6) az összes térbeli vektorok, amelyek végpontja az első térfelcsoportban van;

**15. Feladat.** Mutassa meg, hogy az  $\mathbb{R}^2$  vektortérben minden nemtriviális altér

$$\{(x, y) : \alpha x + \beta y = 0\}$$

alakú valamely  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  skalárokra.

**16. Feladat.** Alteret alkotnak-e  $\mathbb{R}[x]$ -ben azon  $p(x)$  polinomok, melyekre:

- (a)  $p(x)$  foka 3 ;
- (b)  $p(x)$  konstans tagja nulla ;
- (c)  $p(x)$  foka kisebb, mint 3 és a zéruspolinom;
- (d)  $p(x)$  foka páros és a zéruspolinom.

**17. Feladat.** Döntse el, hogy a valós számsorozatok  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  vektorterében az alábbi részhalmazok alteret alkotnak-e (egy általános sorozatot  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  formában jelölünk):

- (1)  $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_1 = 2a_3 + a_5\}$ ;
- (2)  $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_1 = 2a_3a_5\}$ ;
- (3)  $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \text{ minden } n = 2, 3, \dots\}$ , azaz a harmadik tagtól kezdve a sorozat minden tagja a megelőző két tag összege;
- (4) a (végtelen) számtani sorozatok;
- (5) a (végtelen) mértani sorozatok, megengedve a csupa 0 sorozatot is;
- (6) a monoton sorozatok;
- (7) a korlátos sorozatok;
- (8) a konvergens sorozatok;
- (9) a 0-ba konvergáló sorozatok;
- (10)  $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = 0 \text{ végtelen sok } i\text{-re}\}$ ;
- (11)  $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = 0 \text{ legfeljebb véges sok } i \text{ kivételével}\}$ ;
- (12)  $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = 0 \text{ legfeljebb 100 darab } i \text{ kivételével}\}$ ;
- (13)  $\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = 0 \text{ legfeljebb az első 100 darab } i \text{ kivételével}\}$ ;

**18. Feladat.** Alteret alkotnak-e az adott függvényhalmazok az  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  vektortérben:

- (1)  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(1) \in \mathbb{Q}\}$ ;
- (2)  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(1) = f(2)\}$ ;
- (3)  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(1) = f(2) = 0\}$ ;
- (4)  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(1) \geq 0 \text{ és } f(2) \leq 0\}$ ;
- (5)  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(1) \geq 0 \text{ vagy } f(2) \leq 0\}$ ;
- (6)  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : 3f(0) = 2f(1)\}$ ;
- (7)  $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(2) = f(1) + 1\}$ ;
- (8) a konstans, azaz az  $f(x) = a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) alakú függvények halmaza;
- (9) a felülről korlátos függvények;
- (10) a páros függvények;
- (11) a folytonos függvények;
- (12) a legfeljebb öt pontban szakadó függvények;
- (13) a legfeljebb véges sok pontban szakadó függvények;
- (14) az összes olyan függvény halmaza, melynek van valós zérushelye;

**19. Feladat.** Mutassa meg, hogy ha  $S$  és  $T$  a  $V$  vektortér olyan alterei, melyekre  $S \cap T = \{0\}$ , akkor az  $S + T$  összeg-altér minden eleme *egyféleképpen* írható  $s + t$ ,  $s \in S$ ,  $t \in T$  alakba. Mutassunk rá egy (ellen)példával, hogy ez az állítás nem igaz, ha  $S \cap T \neq \{0\}$ .

\* \* \* \* \*

**GENERÁLÁS.**

**20. Feladat.** Tekintsük a valós számhármások vektorterében az  $a = (1, -3, 2)$  és a  $b = (2, -2, 4)$  vektorok által generált alteret.

- (a) Eleme-e ennek az alternek a  $c = (5, -3, 10)$  vektor?  
 (b) Adjon meg egy olyan valós számhármast, amely nem eleme az  $a$  és  $b$  által generált alternek.

**21. Feladat.** Igazolja, hogy az  $\{(0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  részhalmaz altere az  $\mathbb{R}^3$  vektortérnek. Mutassa meg, hogy ezt az alteret generálja a  $\{(0, 1, 2), (0, -1, 1)\}$  vektorrendszer.

**22. Feladat.** Generátorrendszere-e az  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  vektortérnek az

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

halmaz?

**23. Feladat.** Határozza meg az

- (a)  $(0, 1, 0)$ ;  
 (b)  $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$ ;  
 (c)  $(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)$ ;  
 (d)  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$ ;

vektorok által kifeszített alteret  $\mathbb{R}^3$ -ban.

**24. Feladat.** Mutassa meg, hogy az alábbi két-két vektor ugyanazt az alteret feszíti ki  $\mathbb{R}^3$ -ban:

$$a = (1, 1, 0), b = (0, 0, 1) \quad \text{illetve} \quad c = (1, 1, 1), d = (-1, -1, 1).$$

*Megoldás.* Legyen  $A = [a, b]$ , az  $a$  és  $b$  vektorok által generált (=kifeszített),  $C = [c, d]$  pedig a  $c$  és  $d$  által generált alter. A generátum tulajdonságai (6.10. Tétel) alapján  $a, b \in A$  és  $c, d \in C$ , ezért  $A = C$ -nek nyilvánvaló szükséges feltétele, hogy  $a, b$  benne legyen  $C$ -ben,  $c, d$  pedig benne legyen  $A$ -ban. Ezt fogjuk megmutatni, majd belátjuk, hogy ez elegendő is.

Mivel  $C$  a  $c, d$  vektorok összes (valós együtthatós) lineáris kombinációjából áll, azaz  $C = \{\gamma c + \delta d : \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$ , ezért az  $a \in C$  igazolásához elő kell állítani az  $a$  vektort  $c$  és  $d$  lineáris kombinációjaként. Keressünk olyan  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  skalárokat, hogy  $a = \gamma c + \delta d$  legyen! Azaz meg kell oldani a következő egyenletet:

$$(1, 1, 0) = \gamma(1, 1, 1) + \delta(-1, -1, 1) = (\gamma - \delta, \gamma - \delta, \gamma + \delta). \quad (1)$$

Két valós számpár pontosan akkor egyenlő, ha komponensenként egyenlők, ezért (1) a következő (egyszerű) egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\gamma - \delta = 1, \quad \gamma - \delta = 1, \quad \gamma + \delta = 0.$$

Ennek egyetlen megoldása  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\delta = -\frac{1}{2}$ . Tehát  $a$  valóban előáll  $c, d$  lineáris kombinációjaként:  $a = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d$ , és így  $a \in [c, d]$ .

Feladat: Hasonlóan igazoljuk, hogy  $b \in C$ ,  $c \in A$ , és  $d \in A$ .

Ez viszont elegendő is, mert ha  $a, b \in C$ , akkor tetszőleges  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  skalárok esetén  $\alpha a + \beta b \in C$ , hiszen  $C$  altér (ld. 6.10. Tétel), és így zárt a műveletekre. Ez viszont azt jelenti, hogy  $a, b$  minden lineáris kombinációja, másszóval  $A$  minden eleme  $C$ -ben van, vagyis  $A \subseteq C$ .

Hasonlóan, abból, hogy  $c, d \in A$ , kapjuk, hogy  $C \subseteq A$ , így a két altér valóban egyenlő.

*Megjegyzés.* Általában is belátható, hogy ha valamely  $V$  vektortér két altere kölcsönösen tartalmazza a másik valamely generátorrendszerét, akkor azok megegyeznek. Ha ugyanis  $X \subseteq [Y]$  (azaz  $X$  benne van az  $[Y]$  altérben), akkor  $[X] \subseteq [Y]$ , mert  $[X]$  a *legsűkebb*  $X$ -et tartalmazó altere  $V$ -nek; ld. 6.10. Tétel. Hasonlóan, ha  $Y \subseteq [X]$ , akkor  $[Y] \subseteq [X]$ , és így  $[X] = [Y]$ .

**25. Feladat.** Milyen feltételeket kell az  $a, b$  és  $c$  valós számoknak kielégíteni, hogy az  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  vektor az  $u = (2, 1, 0)$ ,  $v = (1, -1, 2)$  és  $w = (0, 3, -4)$  vektorok által generált altérhez tartozzon?

**26. Feladat.** Az  $\mathbb{R}^3$  vektortérben legyen  $S$  a  $(0, x_1, x_2)$  alakú vektorok altere,  $T$  pedig az  $(1, 1, 1)$  és  $(2, 3, 0)$  vektorokkal generált altér. Határozza meg az  $S \cap T$  alteret.

**27. Feladat.** Az  $\mathbb{R}^4$  vektortérben legyen

$$A = [(1, 0, -1, 2), (-1, 2, 2, 0)] \quad B = [(1, 3, -2, 0), (2, 4, -5, -2)]$$

Határozza meg az  $A \cap B$  és  $A + B$  altereket.

**28. Feladat.** Legyen  $V$  tetszőleges valós vektortér és tegyük fel, hogy  $b_1, b_2 \in V$  lineárisan független vektorok. Igazolja, hogy az  $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$  és  $a_2 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ ) vektorok által kifeszített altér pontosan akkor egyezik meg a  $\{b_1, b_2\}$  által kifeszített altérrel, ha  $\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \neq 0$ .

**29. Feladat.** Az  $\mathbb{R}^n$  vektortérben tekintsük az

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 0\}$$

$$T = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n\}$$

részhalmazokat. Igazolja, hogy:

- (a)  $S$  és  $T$  alterek;
- (b)  $S \cap T = \{0\}$ ;
- (c)  $S + T = \mathbb{R}^n$ .