Végtelen halmazok, számosságok

4.1. feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek (megszámlálhatóan) végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

(a) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki? (A szobák mind egyágyasak!)

(b) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?

(c) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

(d) A szomszédos városban végtelen sok végtelen szálloda van. Sajnos mind kigyulladt... Mit tegyen most a portás?

4.2. feladat. Bizonyítsuk be bijekció megadásával, hogy A és B azonos számosságú.

(a) $A = (0;1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}, B = [0;1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

(b) $A = (0;1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}, B = (10;100) = \{x \in \mathbb{R} : 10 < x < 100\}$

(c) $A = (0;1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}, B = \mathbb{R}$

(d) $A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\big\}, B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\} \backslash \{(0,0,1)\}$

4.3. feladat. Oldjuk meg az előző feladatot úgy is, hogy nem bijekciót adunk meg, hanem a számosságok aritmetikájának alaptételét használjuk.

4.4. feladat. Mutassuk meg, hogy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt intervallumot lehet megadni a számegyenesen.

4.5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a természetes számokból álló sorozatok halmaza ekvivalens a természetes számok összes részhalmazainak halmazával. (Adjunk meg injektív leképezést mind a két irányban, majd használjuk a dichotómiát.)