FELADATOK A „LOGIKA" TÉMAKÖRHÖZ

6.1. Feladat. Logikailag helyesek-e az alábbi következtetések?
(a) $A \to (B \wedge C),\ (\neg B) \vee (\neg C) \models \neg A$;
(b) $(A \wedge B) \to \big(C \vee (\neg D)\big),\ D \to C \models A$;
(c) $(\neg A) \vee (\neg B),\ \big((\neg C) \vee (\neg D)\big) \to B,\ A \to (E \wedge C) \models A \to D$;
(d) $A \to (B \vee C),\ E \to (\neg B),\ D \leftrightarrow \big(E \wedge (\neg C)\big),\ D \vee F \models A \to F$.
(e) *Pénzem aranyba fektetem, vagy világkörüli útra indulok. Ha világkörüli útra indulok, akkor ha megnézem a riói karneváltat, nem utazom Dániába. Ha megnézem a riói karnevált, akkor világkörüli útra indulok, és még Dániába is elutazom. Eladom a lakásom, és elutazom Dániába.*
Tehát, ha eladom a lakásom, akkor a pénzemet aranyba fektetem.
(f) *Ha szerencsém lesz, vagy segít a barátom, akkor sikerül a vizsgám. Ha csak akkor segít a barátom, ha meghívom ebédelni, akkor rossz hangulatom lesz. Ha meghívom ebédelni a barátomat, akkor nem sikerül a vizsgám, vagy nyáron külföldre utazom. Meghívom ebédelni a barátomat, vagy nyáron külföldre utazom.*
Tehát, ha szerencsém lesz, akkor nyáron külföldre utazom.

6.2. Feladat. Kielégíthetők-e az alábbi formulahalmazok?
(a) $\{A \wedge B,\ (A \wedge C) \to (\neg B),\ B \to C\}$; (b) $\{A \wedge B,\ ((\neg A) \vee C) \to (\neg B),\ B \to C\}$;
(c) $\{A \vee B,\ B \to C,\ A \to \big(B \vee (\neg C)\big)\}$; (d) $\{A \to (B \to C),\ B \wedge \big(A \leftrightarrow (\neg C)\big)\}$.

6.3. Feladat. Legyenek $F_1, \ldots, F_n$ és G tetszőleges ítéletkalkulusbeli formulák. Megállapítható-e, hogy $F_1, \ldots, F_n \models G$ teljesül vagy nem teljesül, ha csak annyit tudunk, hogy $\{F_1, \ldots, F_n\}$ kielégíthető?

6.4. Feladat. Igaz-e, hogy az alábbi formulasorozat a $D \to C$ formula levezetése (a tautológiagyűjtemény alapján) az $A \to (B \to C)$, $D \to A$, B premisszákból? Igenlő válasz esetén jelezze a szokásos módon a lépéseket, nemleges válasz esetén pedig keresse meg a meg nem engedett lépést.
(1) $A \to (B \to C)$
(2) $D \to A$
(3) $D \to (B \to C)$
(4) $(D \wedge B) \to C$
(5) $(B \wedge D) \to (D \wedge B)$
(6) $(B \wedge D) \to C$
(7) $B \to (D \to C)$
(8) B
(9) $D \to C$

6.5. Feladat. Igazolja levezetéssel az

$$E \vee F,\ E \to (\neg G),\ (\neg F) \vee H \models G \to H$$

következtetés helyességét.

6.6. Feladat. Hány részformulája, részkifejezése és szabad változója van a

$$(\forall x)P\big(f(x,a)\big) \to (\exists y)\Big(P\big(f(y,x)\big) \wedge Q(x)\Big)$$

formulának, ahol Q egyváltozós predikátum, P kétváltozós predikátum, f kétváltozós függvényjel és a individuumkonstans.

6.7. Feladat. Jelölje $P(x)$ az „*x páros szám*", $N(x)$ az „*x négyzetszám*", $M(x)$ az „*x negatív szám*", $Q(x,y)$ az „*x osztója y-nak*" predikátumokat. Fordítsa le köznapi nyelvre az alábbi formulákat (az individuumtartomány az egész számok halmaza):

(a) $(\forall x)\Big(N(x) \to (\exists y)\big(P(y) \wedge O(x,y)\big)\Big)$;

(b) $(\exists x)\bigg(P(x) \wedge (\forall y)\Big(\big(P(y) \wedge M(y)\big) \to \big(\neg O(y,x)\big)\Big)\bigg)$.

Tagadja a formulákat, majd a kapott formulának megfelelő ítéletet fogalmazza meg köznapi nyelven úgy, hogy a „nem minden” és a „nincsenek” szavak, illetve ezek szinonímái ne szerepeljenek benne.

6.8. Feladat. Tekintsük a következő predikátumokat, illetve indviduumkonstansokat (az individuumtartomány az emberek halmaza):

p: „*Péter*”, $A(x)$: „*x átmegy a vizsgán*”, $F(x)$: „*x felkészült a vizsgára*”,
$H(x)$: „*x hallgató*”, $B(x,y)$: „*x az y barátja*”, $C(x,y)$: „*x csoporttársa y-nak*”,
$E(x,y)$: „*x egyenlő y-nal*”, $S(x,y)$: „*x szóba áll y-nal*”.

Ezek segítségével formalizálja az alábbi ítéleteket:

(a) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
(b) *Minden hallgatónak van barátja.*
(c) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal állnak szóba.*
(d) *Ha Péter, és rajta kívül még valaki felkészült a vizsgára, akkor legalább ketten átmennek a vizsgán.*
(e) *Ha Péter felkészült a vizsgára, de más nem, akkor legfeljebb egyvalaki megy át a vizsgán.*

6.9. Feladat. Formalizálja a predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket (individuumtartománynak tekintsük az emberek halmazát).

(a) *Vannak nőtlen férfiak.*
(b) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
(c) *Jánosnak van szülője, de nincs gyermeke.*
(d) *A becsületes férfiak házastársai is becsületesek.*
(e) *Mindenkinek két szülője van.*
(f) *Ha nem csak Jánoson becsületes, akkor egyes házasságokban élő apák is becsületesek.*

A predikátumok és individuumkonstansok legyenek a következők:

j: „*János*”, $A(x)$: „*x anya*”, $B(x)$: „*x becsületes*”,
$F(x)$: „*x férfi*”, $H(x,y)$: „*x házastársa y-nak*”, $E(x,y)$: „*x egyenlő y-nal*”,
$S(x,y)$: „*x szülője y-nak*”.

6.10. Feladat. Formalizálja a predikátumkalkulusban az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány Micimackó és barátainak halmaza. A predikátumok és individuumkonstansok legyenek a következők:

Micimackó és barátai közül pontosan Tigris és a kenguruk tudnak ugrálni.

A predikátumok és konstansok a következők:

m: „*Micimackó*”, t: „*Tigris*”, $K(x)$: „*x kenguru*”,
$U(x)$: „*x tud ugrálni*”, $B(x,y)$: „*x barátja y-nak*”, $E(x,y)$: „*x egyenlő y-nal*”.

6.11. Feladat. Formalizálja a predikátumkalkulusban az következő ítéleteket (az individuumtartomány az emberek halmaza):

(a) *Minden matematikus éhes.*
(b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
(c) *Az éhes matematikusok nem kedvelik a szakácsokat.*
(d) *Minden matematikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
(e) *Ha egy szakács nem kedvel egy matematikust, de főz neki, akkor a matematikus rosszul lesz.*
(f) *Van olyan szakács, aki csak matematikusnak főz.*
(g) *Van olyan ember, aki főz, de nem szakács.*

6.12. Feladat. Formalizálja predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket (individuumtartománynak tekintsük az emberek halmazát).

(a) *Vannak szerencsés milliomosok.*
(b) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
(c) *Szerencsés milliomosoknak legalább két gyermekük van.*

6.13. Feladat. Fogalmazza meg köznapi nyelven azt az ítéletet, amelyet a

$$(\forall x)\Big(P(x) \to (\exists y)\big(P(y) \wedge (y > x)\big)\Big)$$

formula formalizál, ahol az individuumtartomány az egész számok halmaza, $>$ a szokásos nagyobb reláció, és $P(x)$ az „*x páros szám*” predikátum.

6.14. Feladat. Határozza meg a **6.8-6.12. Feladatokban** kapott formulák tagadásának azt az alakját, amelyben legfeljebb predikátumot tagadunk, és fogalmazza meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven, minél egyszerűbb formában.

6.15. Feladat. Teljesül-e az
(a) $\big((\exists x)N(x) \wedge (\exists x)K(x)\big) \to (\exists x)\big(N(x) \wedge K(x)\big)$;
(b) $(\exists x)\big(N(x) \vee P(x)\big) \to \big((\exists x)N(x) \vee (\exists x)P(x)\big)$
formula az $(A; N, K, P)$ interpretációnál, ahol $A = \mathbb{Z}$, N a négyzetszámok, K a köbszámok, P pedig a prímszámok halmaza? Logikailag igaz-e az (a), illetve (b) formula?

6.16. Feladat. Adjon meg egy kételemű halmazon olyan interpretációt, ahol a

$$(\forall x)\Big(P(x) \vee P\big(f(x)\big)\Big) \wedge (\exists x)\Bigg(Q(x) \wedge \Big(\neg P\Big(f\big(f(x)\big)\Big)\Big)\Bigg)$$

ítélet igaz.