

# INVERZ MÁTRIX

## IRODALOM

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:

Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003, 4. fejezet (Inverzmátrix);

### további ajánlott irodalom:

D. K. Fagyjev–I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai feladatok*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, illetve Typotex Kiadó, 2000; 4. fejezet, 480. a) - h), 481. a) - d), f) - g) 482. feladat

Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás* (példatár, Bolyai-könyvek sorozat), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000;

A Mátrixok c. fejezetben (a 171. oldaltól): 1., 2., 4.-5., 16., 21.-22., 30. feladat

## PÉLDÁK

**1. Példa.** Határozza meg az alábbi mátrix inverzét (amennyiben létezik):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Megoldás:* Jelöljük  $A$ -val a szóban forgó mátrixot. Először kiszámítjuk a determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 13 \neq 0.$$

Ez a 4.2. Tétel szerint azt jelenti, hogy  $A$ -nak van inverze.

Az inverz meghatározásához kiszámítjuk az adjungált aldeterminánsokat (emlékeztetőül:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ ):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

Ezekből már fölépíthetjük az  $A$  inverzét (ügyeljünk a sor- és oszlopindexekre!):

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{-12}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

Ellenőrzésképpen:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3.$$

### TOVÁBBI AJÁNLOTT FELADATOK

**1. Feladat.** Határozza meg a következő mátrixok inverzét (amennyiben létezik):

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(e)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(f)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(g)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(h)  $\begin{pmatrix} 21 & 17 & 13 & 44 \\ 0 & 63 & -83 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \end{pmatrix}$

(i)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**2. Feladat.** Oldja meg a következő mátrixegyenleteket:

(a)  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(c)  $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$

(e)  $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 7 \\ 12 & 30 & 13 \\ 8 & 20 & 9 \end{pmatrix}$

$$(f) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

**3. Feladat.** Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oldja meg az alábbi mátrixegyenletek közül a megoldhatókat:

$$(a) \quad AX = B \qquad (b) \quad XA^{-1} = B \qquad (c) \quad B + X = A^2$$

**4. Feladat.** Legyenek  $A$ ,  $B$ ,  $C$  adott,  $X$  pedig ismeretlen, azonos méretű négyzetes és nemelfajuló mátrixok. Oldja meg az alábbi „mátrix-egyenleteket” (azaz a műveletek ismert-tanult tulajdonságai alapján fejezzük ki az  $X$  mátrixot az összefüggésből):

$$(a) \quad AX^{-1}B - C = AX^{-1};$$

$$(b) \quad (AX)^{-1} + X^{-1} = B;$$

Adja meg a megoldásokat, abban az esetben, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**5. Feladat.** Igazolja az alábbi, négyzetes mátrixokra vonatkozó állításokat:

- (1) Ha  $AB$  nemelfajuló, akkor  $A$  és  $B$  szintén nemelfajuló.
- (2) Ha az  $A$  valamely pozitív egész kitevős hatványa a nullmátrix, akkor  $A$  elfajuló.
- (3) Ha az  $A$  nemelfajuló, akkor bármely pozitív egész kitevős hatványa is nemelfajuló; továbbá

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n.$$