FELADATOK A „SZÁMELMÉLET” TÉMAKÖRHÖZ

8.1. Feladat. Döntse el az alábbi a, b egész számokról - anélkül, hogy megkeresné a és b prímosztóit -, hogy $a|b$ vagy sem:

(a) $a = -163, \quad b = 3643;$
(b) $a = 209, \quad b = -3971;$
(c) $a = -637, \quad b = 8281;$
(d) $a = -143, \quad b = -1729.$

8.2. Feladat. Határozza meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adja meg legkisebb közös többszörösüket:

(a) $a = 539, \quad b = -1001;$
(b) $a = -1253, \quad b = -3241;$
(c) $a = 2401, \quad b = 1859;$
(d) $a = -1183, \quad b = 1573.$

8.3. Feladat. Döntse el az alábbi a, b egész számokról - anélkül, hogy megkeresné a és b prímosztóit -, hogy az a és b egészek relatív prímek-e vagy sem:

(a) $a = -841, \quad b = -2413;$
(b) $a = 2717, \quad b = -847;$
(c) $a = -1511, \quad b = 2647;$
(d) $a = 2563, \quad b = -3367.$

8.4. Feladat. Határozza meg a **8.2. Feladat**ban kapott eredményeket felhasználva, a lehető legkevesebb számolással a következő $a, \ b$ egész számok legnagyobb közös osztóját:

(a) $a = 3 \cdot 1253, \quad b = 3 \cdot 3241;$
(b) $a = -2 \cdot 539, \quad b = 1001;$
(c) $a = -2401, \quad b = -49 \cdot 1859;$
(d) $a = 1183, \quad b = 143$, ahol $1537 = 143 \cdot 11.$

8.5. Feladat. Legyen a természetes szám. Határozza meg a $3a + 7$ és $4a + 9$ számok legnagyobb közös osztóját.

8.6. Feladat. Határozza meg mindazokat az a egész számokat, amelyekre az

(a) $\dfrac{3a+10}{10a+33}$ **(b)** $\dfrac{19a+7}{7a+1}$

tört egyszerűsíthető.

8.7. Feladat. Oldja meg az alábbi diofantoszi egyenleteket.

(a) $72x+60y=24$; **(b)** $78x+30y=12$; **(c)** $237x+571y=13$;
(d) $197x+418y=17$; **(e)** $18x+21y=9$; **(f)** $21x+36y=12$;
(g) $21x-15y=12$; **(h)** $6x-10y=22$.

8.8. Feladat. Háromféle bélyeget vásároltunk. Az első alkalommal az egyes fajtákból rendre 3, 5 és 7 darabot, a második alkalommal 11, 13 és 9 darabot. A számla első alkalommal 110 Ft, a második alkalommal 250 Ft volt. Milyen címletű bélyegeket vásároltunk?

8.9. Feladat. Valaki a következőket mondta: „A barátnőm 22. születésnapjára 22 szál virágból álló csokrot vettem 2000 forintért. A csokor fréziából, nárciszból és rózsából állt, amelyekből egy szál 50 forintba, 70 forintba, illetve 130 forintba került.” Hány szál virágot tartalmazott az egyes fajtákból a csokor, ha azt is tudjuk, hogy mindegyikből legalább két szál volt, és semelyik kettőből nem volt ugyanannyi?

8.10. Feladat. Egy 5 m hosszú kerítés szegélyének elkészítéséhez 15 cm, 20 cm és 93 cm hosszúságú lécek állnak rendelkezésünkre. Az egyes lécfajták felszegeléséhez rendre 2, 3 és 9 szög kell. Mennyire van szükségünk a lécekből, ha 50 szegünk van, és ezeket mind fel is akarjuk használni?

8.11. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges prímszámot 30-cal osztva 1-et vagy prímszámot kapunk maradékul.

8.12. Feladat. Melyek azok a természetes számokból álló párok, melyek legnagyobb közös osztója 6, legkisebb közös többszöröse 1260?

8.13. Feladat. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 12 darab pozitív osztója van?

8.14. Feladat. Mely n természetes számokra igaz, hogy

(a) n, $n+2$ és $n+4$ is prímszám;
(b) n^3-27 prímszám.

8.15. Feladat. Legyen m és n két olyan pozitív egész, amelyek szorzata négyzetszám.

(a) Igaz-e, hogy ekkor m és n is szükségképpen négyzetszám?
(b) Igaz-e, hogy ha m és n relatív prímek, akkor m és n is szükségképpen négyzetszám?

8.16. Feladat. Oldja meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $6x \equiv 4 \pmod 8$; **(b)** $13x \equiv -3 \pmod{34}$;
(c) $88x \equiv 42 \pmod{55}$; **(d)** $5x \equiv 24 \pmod{13}$;
(e) $9x \equiv 15 \pmod{12}$; **(f)** $29x \equiv 17 \pmod{73}$.

8.17. Feladat. Melyik az a 4-re végződő háromjegyű szám, amely 63-mal osztva 1-et ad maradékul?

8.18. Feladat. Határozza meg azt a legkisebb háromjegyű természetes számot, amelynek 12-szerese 6-ot ad maradékul 30-cal osztva.

8.19. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges n pozitív egész számra teljesül, hogy

(a) $13 \mid 3^{n+1} + 4^{2n-1}$; **(b)** $16 \mid 3^{2n+1} + 5^{2n-1}$.

8.20. Feladat. Oldja meg az alábbi kongruencia-rendszereket.

(a) $x \equiv 3 \pmod 2$, $x \equiv 6 \pmod 5$; **(b)** $3x \equiv 15 \pmod{24}$, $4x \equiv 11 \pmod{21}$;

(c) $12x \equiv 27 \pmod{57}$, $5x \equiv 16 \pmod{38}$; **(d)** $5x \equiv 1 \pmod 6$, $7x \equiv 9 \pmod{10}$;

(e) $2x \equiv 4 \pmod{10}$, $4x \equiv 8 \pmod 3$, $5x \equiv 8 \pmod 7$; **(f)** $2x \equiv 6 \pmod{10}$, $3x \equiv 9 \pmod 7$, $5x \equiv 2 \pmod 3$;

(g) $2x \equiv 18 \pmod{10}$, $10x \equiv 40 \pmod{12}$, $15x \equiv 9 \pmod{21}$; **(h)** $10x \equiv 16 \pmod 9$, $6x \equiv 3 \pmod{21}$, $3x \equiv 2 \pmod 5$;

(i) $3x \equiv 8 \pmod{11}$, $15x \equiv 6 \pmod{27}$, $5x \equiv 1 \pmod 8$; **(j)** $3x \equiv 1 \pmod 5$, $5x \equiv 3 \pmod 7$, $13x \equiv 4 \pmod 9$;

(k) $2x \equiv 1 \pmod 5$, $5x \equiv -1 \pmod 6$, $4x \equiv 11 \pmod 9$; **(l)** $7x \equiv 4 \pmod 5$, $3x \equiv 1 \pmod 4$, $4x \equiv 13 \pmod 9$.

8.21. Feladat. Egy labdarúgó mérkőzésre azonos számú férőhellyel rendelkező buszokkal érkeznek a szurkolók, akiket biztonsági okokból kisebb csoportokban engednek be a stadionba. Ha a szurkolók 4 busszal érkeznek, és 5 fős csoportokban engedik be őket, akkor az utolsó csoportban csak 3 szurkoló marad. Ha 13 busszal érkeznek, és 8-as csoportokban nyernek bebocsátást, akkor szintén 3 szurkoló lesz az utoljára beengedett csoportban. Míg ha 16 busszal érkeznek szurkolók, és egyszerre 9-et léptetnek be, akkor végül 5 szurkoló marad. Hány személyesek a buszok, ha tudjuk, hogy egy buszba legfeljebb 100-an férnek, és a buszok minden esetben tele voltak?

8.22. Feladat. Bizonyos megfigyelések szerint a varjak mindig azonos létszámú rajokban vándorolnak. Ha 11 varjúraj oly módon száll le egy fára, hogy a fa minden ágára 4 varjú kerül, akkor végül egy varjú egyedül marad. Ha 12 varjúraj száll le egy fa ágaira hetes csoportokban, akkor szintén egy varjú egyedül lesz egy ágon. Míg ha 13 varjúraj kilences csoportokban száll le egy fa ágaira, akkor az utolsó ágon 7 varjú lesz. Hány varjú van egy rajban, ha tudjuk, hogy ez a szám nem több, mint 100?

8.23. Feladat. Legyen n természetes szám, valamint a, b, c és d egész számok, amelyekre teljesül, hogy $ad \equiv bc \pmod{n}$ és n relatív prím az a, b, c, d számok mindegyikéhez. Igazoljuk, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén $ax \equiv by \pmod{n}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $cx \equiv dy \pmod{n}$.

8.24. Feladat. Oldja meg a következő egyenleteket a természetes számok halmazán.

(a) $2\varphi(x) = x$; **(b)** $3\varphi(x) = x$; **(c)** $\varphi(x) = x - 8$;
(d) $\varphi(x) = x - 10$; **(e)** $\varphi(x^2) = 2x$; **(f)** $\varphi(x^2+x) = 3\varphi(x)$.

8.25. Feladat. Határozzuk meg, hogy az a szám milyen maradékot ad n-nel osztva.

(a) $a = 19^{81}$, $n = 75$; **(b)** $a = 17^{74}$, $n = 18$; **(c)** $a = 17^{20}$, $n = 40$;
(d) $a = 21^{42}$, $n = 50$; **(e)** $a = 32^{35^{240}}$, $n = 13$; **(f)** $a = 100^{241^{53}}$, $n = 143$;
(g) $a = 13^{321^{53}}$, $n = 87$; **(h)** $a = 4^{661^{335}}$, $n = 99$; **(i)** $a = 91^{441^{222}}$, $n = 88$.

8.26. Feladat. A mai napon (2003. november 10-én) hétfő van. Milyen nap lesz $712^{185^{937}}$ nap múlva?

8.27. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor

$$n \mid 2^{(n-1)!} - 1.$$