FELADATOK AZ „ABSZTRAKT ALGEBRAI KONSTRUKCIÓK" TÉMAKÖRHÖZ

Ebben a feladatsorban $\mathbb{R}^+$, illetve $\mathbb{Q}^+$ a pozitív valós, illetve racionális számok halmazát jelöli.

7.1. Feladat. Homomorfizmusok, beágyazások, izomorfizmusok, endomorfizmusok, automorfizmusok-e az alábbi leképezések?

(a) $(\mathbb{R}; A_n) \to (\mathbb{R}^+; G_n)\,, x \mapsto 3^x$, ahol $A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ és $G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$;

(b) $(\mathbb{R}; \oplus, \odot) \to (\mathbb{R}; +, \cdot)\,, x \mapsto x+1$, ahol $x \oplus y = x+y+1$ és $x \odot y = xy + x + y$;

(c) $(\mathbb{R}^+; \oplus, \cdot) \to (\mathbb{R}^+; +, \cdot)\,, x \mapsto 1/x$, ahol $x \oplus y = \frac{xy}{x+y}$;

(d) $(\mathbb{R}^+; +, \cdot) \to (\mathbb{R}^+; +, \cdot)\,, x \mapsto 1/x$;

(e) $(\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}; *) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)\,, x \mapsto \log x$, ahol $x * y = x^{\log y}$;

(f) $(\mathbb{C}; +, \cdot) \to (\mathbb{R}; +, \cdot)\,, x \mapsto \operatorname{Im} x$;

(g) $\left(S_n; \cdot, {}^{-1}, \mathrm{id}\right) \to \left(S_n; \cdot, {}^{-1}, \mathrm{id}\right), \pi \mapsto (12)\,\pi\,(12) \quad (n \geq 2)$;

(h) $\left(S_n; \cdot, {}^{-1}, \mathrm{id}\right) \to \left(S_n; \cdot, {}^{-1}, \mathrm{id}\right), \pi \mapsto (123)\,\pi\,(123) \quad (n \geq 3)$;

(i) $\left(S_n; \cdot, {}^{-1}, \mathrm{id}\right) \to \left(S_n; \cdot, {}^{-1}, \mathrm{id}\right), \pi \mapsto (123)\,\pi\,(132) \quad (n \geq 3)$;

(j) $(\mathbb{Z}_2; +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_2; +, \cdot)\,, x \mapsto x^2$;

(k) $(\mathbb{Z}_3; +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_3; +, \cdot)\,, x \mapsto x^2$;

(l) $\left(P(A); \cap, \cup, {}^{-}\right) \to \left(P(A); \cup, \cap, {}^{-}\right), H \mapsto \overline{H}$, ahol A nemüres halmaz;

(m) $(P(A); \triangle) \to (P(A); \triangle)\,, H \mapsto \overline{H}$, ahol A nemüres halmaz;

(n) $(P(\mathbb{N}); \cup, \cap) \to (P(\mathbb{N}); \cup, \cap)\,, H \mapsto \{1,2,3\} \cup H$;

(o) $\left(P(\mathbb{N}); \cup, \cap, {}^{-}\right) \to \left(P(\mathbb{N}); \cup, \cap, {}^{-}\right), H \mapsto \{1,2,3\} \cup H$;

(p) $(\mathbb{R}; +, f) \to \left(\mathbb{C}; +, {}^{-}\right), x \mapsto ix$, ahol $f(x) = -x$;

(q) $(\{p \in \mathbb{R}[x] : p^* \leq 2\}; +) \to \left(\mathbb{R}^3; +\right), p \mapsto (p(1), p(2), p(3))$;

(r) $(\mathbb{R}[x]; \cdot) \to (\mathbb{N}_0; +)\,, p \mapsto p^*$;

(s) $(K; +, \cdot) \to (\mathbb{R}; +, \cdot)\,, \{a_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$, ahol K a konvergens valós számsorozatok halmaza.

7.2. Feladat. Adja meg $(\mathbb{Z}_4; +)$ egy beágyazását a következő grupoidokba:

(a) $(S_7; \cdot)$,

(b) $(\mathbb{C}; \cdot)$,

(c) $(\mathbb{Z}_{12}; +)$,

(d) $(\mathbb{Z}_5; \cdot)$,

(e) $C_{2,8}$,

(f) $C_{3,4}$,

(g) $\left(\mathbb{R}[x] / \left(x^4 - 1\right); \cdot\right)$.

7.3. Feladat. Melyek izomorfak egymással az alábbi $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3$ grupoidok közül? (A $\mathbb{G}_3$ grupoid művelettáblázatát lásd a feladat végén.)

(a) $\mathbb{G}_1 = (\mathbb{Z}_4; +)$, $\mathbb{G}_2 = (\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}; \cdot)$, $\mathbb{G}_3 = (\{a, b, c, d\}; *)$;
(b) $\mathbb{G}_1 = (\{\pm 1, \pm i\}; \cdot)$, $\mathbb{G}_2 = (\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}; \cup)$, $\mathbb{G}_3 = (\{a, b, c, d\}; \bullet)$;
(c) $\mathbb{G}_1 = (\{2, 6, 15, 30\}; \text{l.k.k.t.})$, $\mathbb{G}_2 = (\{\{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}; \cup)$, $\mathbb{G}_3 = (\{a, b, c, d\}; \otimes)$;
(d) $\mathbb{G}_1 = (\{1, 2, 3, 6\}; \text{l.n.k.o.})$, $\mathbb{G}_2 = (\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}; \cap)$, $\mathbb{G}_3 = (\{a, b, c, d\}; \circ)$;
(e) $\mathbb{G}_1 = (\{0, 1, 2, 3\}; \max)$, $\mathbb{G}_2 = (\{1, 2, 4, 8\}; \text{l.k.k.t.})$, $\mathbb{G}_3 = (\{a, b, c, d\}; \odot)$.

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\bullet$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\otimes$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	d	b
c	a	d	c	c
d	a	b	c	d

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	c	d
c	c	c	c	d
d	d	d	d	d

$\odot$	a	b	c	d
a	a	b	d	d
b	b	b	d	d
c	d	d	c	d
d	d	d	d	d

7.4. Feladat. Határozza meg az előző feladatban szereplő grupoidok automorfizmusait.

7.5. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az alábbi T grupoidtulajdonság algebrai tulajdonság, azaz ha T teljesül $(G; *)$-ra, és $(H; *) \cong (G; *)$, akkor T teljesül $(H; *)$-ra is. Ennek segítségével mutassa meg, hogy a megadott két grupoid nem izomorf egymással.

(a) T : az $x * x = a$ egyenlet minden a-ra megoldható, $(\mathbb{Q}; +) \ncong (\mathbb{Q}^+; \cdot)$;
(b) T : az $x * x = a$ egyenletnek minden a-ra legfeljebb egy megoldása van, $(\mathbb{R}^+; \cdot) \ncong (\mathbb{C} \setminus \{0\}; \cdot)$;
(c) T : $a * a = a$ teljesül minden a-ra, $(P(\mathbb{Z}); \cup) \ncong (P(\mathbb{Z}); \triangle)$;
(d) T : létezik egyelemű generátorrendszer, $(\mathbb{Q}; +) \ncong (\mathbb{Z}; +)$.

7.6. Feladat. Lehet-e az $\mathbb{A}$ algebrában a H halmaz valamely részalgebra alaphalmaza?

(a) $\mathbb{A} = T(\mathbb{N})$, H a véges sok elemet mozgató $T(\mathbb{N})$-beli transzformációk halmaza;
(b) $\mathbb{A} = T(\mathbb{N})$, H a véges sok elemet nem mozgató $T(\mathbb{N})$-beli transzformációk halmaza;
(c) $\mathbb{A} = \left(P(\{1, 2, \ldots, 8\}); \triangle, \overline{}\right)$, H az $\{1, 2, \ldots, 8\}$ halmaz páros elemszámú részhalmazainak halmaza;
(d) $\mathbb{A} = \left(P(\{1, 2, \ldots, 8\}); \cup, \overline{}\right)$, H az $\{1, 2, \ldots, 8\}$ halmaz páros elemszámú részhalmazainak halmaza;
(e) $\mathbb{A} = (\mathbb{R}[x]; +, \cdot)$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(2) = 0\}$;
(f) $\mathbb{A} = (\mathbb{R}[x]; \cdot)$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(2) \neq 0\}$;
(g) $\mathbb{A} = (\mathbb{R}[x]; +, \cdot)$, $H = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(2) \neq 0\}$;
(h) $\mathbb{A} = (\{1, 2, \ldots, 6\}; m)$, ahol $m(a, b, c) = \begin{cases} v, \text{ ha } \{a, b, c\} = \{u, v, w\} \text{ és } u < v < w, \\ \text{a legalább kétszer fellépő elem egyébként,} \end{cases}$
$H = \{2, 4, 5, 6\}$.

7.7. Feladat. Határozza meg a H halmaz által generált részalgebrát az $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3$ algebrákban.

(a) H a prímszámok halmaza, $\mathbb{A}_1 = (\mathbb{Q}^+; \cdot)$, $\mathbb{A}_2 = \left(\mathbb{Q}^+; \cdot, {}^{-1}\right)$, $\mathbb{A}_3 = (\mathbb{Q}^+; +)$;
(b) $H = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $\mathbb{A}_1 = (\mathbb{C}; \cdot)$, $\mathbb{A}_2 = (\mathbb{C}; +)$, $\mathbb{A}_3 = (\mathbb{C}; +, \cdot)$;
(c) $H = \{0, 1\}$, $\mathbb{A}_1 = (\mathbb{R}; A_3)$, $\mathbb{A}_2 = (\mathbb{R}; A_2, A_3)$, $\mathbb{A}_3 = (\mathbb{R}; A_2, A_3, \ldots)$, ahol $n = 2, 3, \ldots$ esetén $A_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$;
(d) $H = \{3, x^2\}$, $\mathbb{A}_1 = (\mathbb{R}[x]; +, -)$, $\mathbb{A}_2 = (\mathbb{R}[x]; \cdot)$, $\mathbb{A}_3 = (\mathbb{R}[x]; +, -, \cdot)$;
(e) H az $\mathbb{N}$ halmaz kételemű részhalmazainak halmaza, $\mathbb{A}_1 = (P(\mathbb{N}); \cup)$, $\mathbb{A}_2 = (P(\mathbb{N}); \cap)$, $\mathbb{A}_3 = (P(\mathbb{N}); \cup, \cap)$.

7.8. Feladat. Mutassa meg, hogy nincs valódi részalgebrája a $(\mathbb{Z}; f, g)$ algebrának, ahol $f(x) = x + 1$ és $g(x) = -x$.

7.9. Feladat. Adja meg a következő algebrák összes egy- és kételemű generátorrendszerét.

(a) $(\mathbb{N};+)$,
(b) $(\mathbb{Z};+)$,
(c) $(\mathbb{Z}_6;+)$,
(d) $(\{a,b,c,d\};*)$ (lásd a művelettáblázatot a feladat végén),
(e) $(\{a,b,c,d\};\bullet)$ (lásd a művelettáblázatot a feladat végén).

$*$	a	b	c	d
a	b	c	c	c
b	b	b	b	b
c	c	b	c	c
d	d	c	b	d

$\bullet$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	b	a	d	b
c	a	c	d	c
d	c	b	c	c

7.10. Feladat. Kompatibilis osztályozása-e $\mathcal{C}$ az $\mathbb{A}$ algebrának? Ha igen, akkor írja le (minél egyszerűbben) a megfelelő faktoralgebrát és adja meg a természetes homomorfizmust.

(a) $\mathbb{A}=(\{a,b,c,d,e,f\};g)$, ahol g a következő unér művelet: $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & c & d & b & f & e \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}=\{\{a\},\{b,c,d\},\{e,f\}\}$;

(b) $\mathbb{A}=(\{a,b,c,d,e,f\};g)$, ahol g a következő unér művelet: $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & c & d & b & f & e \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}=\{\{a,c,e\},\{b,d,f\}\}$;

(c) $\mathbb{A}=(\{1,2,\ldots,6\};m)$, ahol m a 6.(h) feladatban definiált háromváltozós művelet, $\mathcal{C}=\{\{1,2,3,4\},\{5,6\}\}$;

(d) $\mathbb{A}=(\{1,2,\ldots,6\};m)$, ahol m a 6.(h) feladatban definiált háromváltozós művelet, $\mathcal{C}=\{\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}\}$;

(e) $\mathbb{A}=(P(\mathbb{Z});\cup)$, $\mathcal{C}=\{C_1,C_2\}$, ahol C_1 a $\mathbb{Z}$ halmaz véges részhalmazainak halmaza, C_2 pedig a $\mathbb{Z}$ halmaz végtelen részhalmazainak halmaza;

(f) $\mathbb{A}=(P(\mathbb{Z});\cup)$, $\mathcal{C}=\{C_1,C_2\}$, ahol C_1 a $\mathbb{Z}$ halmaz $\mathbb{N}$-et tartalmazó részhalmazainak halmaza, C_2 pedig a $\mathbb{Z}$ halmaz $\mathbb{N}$-et nem tartalmazó részhalmazainak halmaza;

(g) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}_6;+)$, $\mathcal{C}=\left\{\left\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\right\},\left\{\overline{3},\overline{4},\overline{5}\right\}\right\}$;

(h) $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}_6;+)$, $\mathcal{C}=\left\{\left\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\right\},\left\{\overline{1},\overline{3},\overline{5}\right\}\right\}$;

(i) $\mathbb{A}=(\{a,b,c,d\};*)$, $\mathcal{C}=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ (lásd a művelettáblázatot a feladat végén);

(j) $\mathbb{A}=(\{a,b,c,d\};*)$, $\mathcal{C}=\{\{a\},\{b,c,d\}\}$ (lásd a művelettáblázatot a feladat végén).

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	c
b	a	b	c	c
c	d	d	b	b
d	c	d	b	a

7.11. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a $\mathcal{C}$ osztályozáshoz tartozó α ekvivalenciareláció az $\mathbb{A}$ algebrának kongruenciája, és adjon meg izomorfizmust $\mathbb{A}/\alpha$-ról $\mathbb{B}$-re.

(a) $\mathcal{C}=\{\{a,d\},\{b\},\{c\},\{e\},\{f\}\}$, $\mathbb{A}=(\{a,b,c,d,e,f\};g)$, ahol g a következő unér művelet: $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & c & d & b & f & e \end{pmatrix}$, $\mathbb{B}=(\{1,2,3,4,5\};\pi)$, ahol $\pi=(123)(45)$;

(b) $\mathcal{C}=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5,6\}\}$, $\mathbb{A}=(\{1,2,3,4,5,6\};m)$, ahol m a 6.(h) feladatban definiált háromváltozós művelet, $\mathbb{B}=(\{1,2,3\};g)$, ahol $g(a,b,c)=\begin{cases} 2, \text{ ha } a,b,c \text{ különbözőek}, \\ \text{a legalább kétszer fellépő elem egyébként}; \end{cases}$

(c) $\mathcal{C}=\{\{\emptyset\},P(\mathbb{Z})\setminus\{\emptyset\}\}$, $\mathbb{A}=(P(\mathbb{Z});\cup)$, $\mathbb{B}=(\mathbb{Z}_2;\cdot)$;

(d) $\mathcal{C}=\left\{\left\{\overline{0},\overline{3}\right\},\left\{\overline{1},\overline{4}\right\},\left\{\overline{2},\overline{5}\right\}\right\}$, $\mathbb{A}=(\mathbb{Z}_6;+)$, $\mathbb{B}=(\mathbb{Z}_3;+)$;

(e) $\mathcal{C}=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$, $\mathbb{A}=(\{a,b,c,d,e\};*)$ (lásd a művelettáblázatot), $\mathbb{B}=(\{0,1,2\};\max)$.

$*$	a	b	c	d	e
a	a	a	c	d	d
b	b	b	c	e	d
c	c	c	c	e	e
d	d	d	e	e	d
e	d	d	d	d	e

7.12. Feladat. Ellenőrizze, hogy a megadott $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ leképezés homomorfizmus, és határozza meg φ magját és értékkészletét. Végül adjon meg izomorfizmust $\mathbb{A}/\ker\varphi$-ről $\mathbb{A}\varphi$-re.

(a) $\varphi : (P(A);\cup,\cap) \to (P(A);\cup,\cap)\,, H \mapsto H \cap B$, ahol $B \subseteq A$ adott halmazok;

(b) $\varphi : (\mathbb{C};\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot)\,, z \mapsto |z|$;

(c) $\varphi : (S_n;\cdot) \to (\mathbb{R};\cdot)\,, \pi \mapsto \mathrm{sgn}(\pi)$;

(d) $\varphi : (\mathbb{R}[x];+,\cdot) \to (\mathbb{R};+,\cdot)\,, f \mapsto f(2)$;

(e) $\varphi : (\mathbb{R}[x];+) \to (\mathbb{R}[x];+)\,, f \mapsto f'$;

(f) $\varphi : (\mathbb{C};+) \to (\mathbb{R};+)\,, z \mapsto \operatorname{Re} z$;

(g) $\varphi : (\mathbb{Z};+) \to (S_5,\cdot)\,, k \mapsto (12345)^k$;

(h) $\varphi : (\mathbb{Z};+) \to (\mathbb{C};\cdot)\,, k \mapsto \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^k$;

(i) $\varphi : (\mathbb{Z}[x];+,\cdot) \to (\mathbb{Z}_5[x];+,\cdot)\,, \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} x^i$.

7.13. Feladat. Bizonyítsa be, hogy a következő algebráknak nincs az egyenlőségtől és a teljes relációtól különböző kongruenciája.

(a) $(\mathbb{Z}_7;+)$,

(b) $(A;f)$, ahol A egy nemüres halmaz, és $f(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{ha } a \neq b \\ a, & \text{ha } a = b \end{cases}$,

(c) $(\mathbb{R};+,\cdot)$,

(d) $(\{a,b,c,d\};*)$, ahol $*$ művelettáblázata a következő (a kipontozott helyek tetszőlegesen kitölthetők):

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	a	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
c	b	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
d	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

7.14. Feladat. Döntse el, hogy izomorf-e az $\mathbb{A}$ és a $\mathbb{B}$ algebra. Ha igen, adjon meg egy izomorfizmust $\mathbb{A}$-ról $\mathbb{B}$-re.

(a) $\mathbb{A} = (\mathbb{C};+)\,, \mathbb{B} = (\mathbb{R};+) \times (\mathbb{R};+)$;

(b) $\mathbb{A} = (\mathbb{C};\cdot)\,, \mathbb{B} = (\mathbb{R};\cdot) \times (\mathbb{R};\cdot)$;

(c) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_6;+)\,, \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2;+) \times (\mathbb{Z}_3;+)$;

(d) $\mathbb{A} = (S_6;\cdot)\,, \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2;+) \times (\mathbb{Z}_3;+)$;

(e) $\mathbb{A} = (\mathbb{Z}_4;+)\,, \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2;+) \times (\mathbb{Z}_2;+)$;

(f) $\mathbb{A} = (\{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\};\cdot)\,, \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2;+) \times (\mathbb{Z}_2;+)$;

(g) $\mathbb{A} = (P(\{1,2,3\});\triangle,\cap)\,, \mathbb{B} = (\mathbb{Z}_2;+,\cdot) \times (\mathbb{Z}_2;+,\cdot) \times (\mathbb{Z}_2;+,\cdot)$.